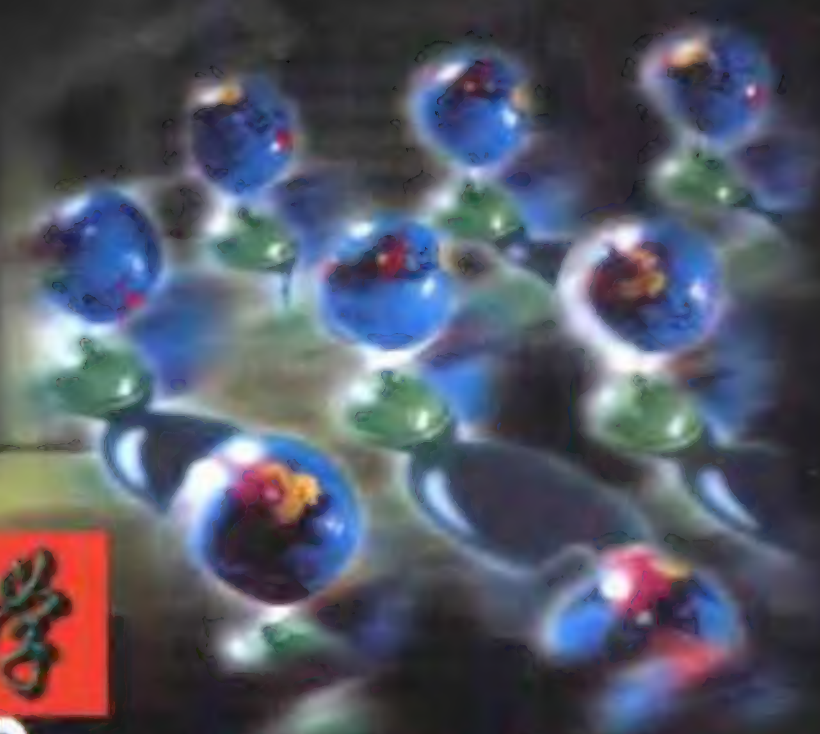


姚泽清 顾红芳 著

老百姓的数学

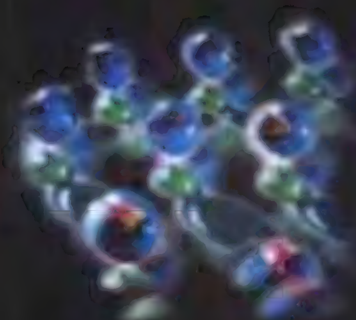
LAOBAIXINGDESHUXUE

QIMIAO DE GAILU SHIJIE

奇妙的概率世界

安徽教育出版社

责任编辑：严云锦 王冰平
装帧设计：李 静



老百姓的数学

奇妙的概率世界

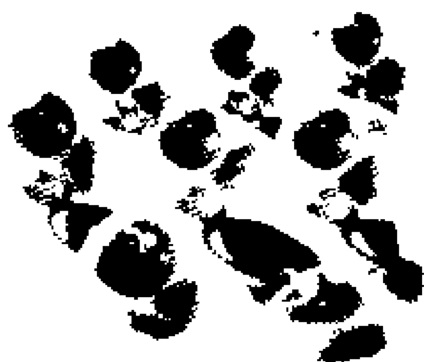

ISBN 7-5336-2910-8
9 787533 629106 >

ISBN 7-5336-2910-8/O·9
定价：7.00元

奇妙的概率世界

老百姓的数学

姚泽清 顾红芳 著





安徽教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

老百姓的数学.奇妙的概率世界/姚泽清,顾红芳著.合肥:安徽教育出版社,2000.5

ISBN 7-5336-2910-8

Ⅰ.老… Ⅱ.①姚…②顾… Ⅲ.①数学-普及读物②概率论-普及读物 Ⅳ.01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第025531号

责任编辑:严云锦 王冰平　　　　装帧设计:李 静

出版发行:安徽教育出版社(合肥市跃进路1号)

网　　址:http://www.ahep.com.cn

经　　销:新华书店

排　　版:安徽飞腾彩色制版有限责任公司

印　　刷:合肥义兴印刷厂

开　　本:880×1230　1/32

印　　张:4.875

字　　数:100 000

版　　次:2002年5月第1版　2002年5月第1次印刷

印　　数:3 000

定　　价:7.00元

发现印装质量问题,影响阅读,请与我社发行部联系调换

电　话:(0551)2651321　　　　邮　编:230061

序

数(shù)起源于数(shǔ),量(liàng)起源于量(liáng)。在有文字历史之前人类就有了数和图形的概念。几千年来,数学由人类生产和社会实践的需求而产生和发展。她不仅被用于科学和技术各领域,也渗透到经济和管理领域以及老百姓的日常生活之中。她不仅是一种工具和语言,也是人们重要的思考方式。她是一种文化,是人类文明的一个重要组成部分。

人类生产和社会实践的需求是数学产生和发展的根本动力。与此同时,数学还有自身内部逻辑完善和追求数学美的强大内部动力。这种内部动力的意义和作用往往不被人们所正确理解,被视为“抽象的游戏”。此外,数学的术语和符号也不易看懂。从中学几何证明开始,数学论述的书写形式就被训练成以固有的逻辑推理为基础,而这种形式常常是探究和思考的真正数学思维方式的颠倒。这一切使人们对数学望而生畏,把数学看成是少数人的一种专门技艺。

综上所述,我们迫切需要用生动的语

言，把数学的进步和数学的思想方法通俗地介绍给大众，让更多的人认识到数学的作用和意义，在不同的工作领域中自觉地采用数学思维方式，使数学更贴近大众。在这方面，盛立人教授等撰写的《老百姓的数学》丛书是一个很好的尝试。作者用轻松活泼的语言把人们带进千姿百态的数学世界，让人们领略数学在老百姓日常生活中所起的作用和影响。我相信这套书对于普及和传播数学知识和思想，让民众更加了解、掌握和运用数学，会起到促进的作用。

从某种意义上说，撰写通俗性数学普及读物比撰写专业数学著作和论文更为困难。它需要作者对数学和相关领域的深刻理解，也需要文采。我们需要更多的有识之士共同努力，做好数学的普及与传播这项艰巨而又神圣的事业。

冯克勤

识于2000年3月

作者的话

这是一件真实的事，发生在1989年。

这一年，有家专业银行私自推出了一个储种，只要你每年在银行存入100元，连续存8年，则从第9年起，不需要你再花一分钱，你就可以从银行那里每年得到100元，直到你去世为止。

比起现在风行的18岁以前每月存入若干元，到上大学与谈婚论嫁的年龄时再返还一笔助学金、婚嫁金，然后等到退休后每月支取一笔数目可观的养老金的少儿终身保险来，它显得更直截了当，更令人怦然心动。

这可是一个以小搏大的行动，你只要花8个100元，就可以得到数倍于此的回报，就算你8年后是40岁，以当时中国人的平均寿命71岁计，你可以得到31个100元，更何况你还有很大的概率活过71岁呢。

于是，你毫不犹豫地将钱投了进去，并且心中暗自窃喜：这银行的老总大概数学没学好，才干出这种赔本赚吆喝的事。

很可惜，银行是算过的，而你却没有。下面我们就来看一看，在当时的情况下，到底是银行吃亏，还是你吃亏。

在计算之前，我们必须考虑到这样一个大背景：为了应对通货膨胀的潜在压力，1989年人民币一年期储蓄存款的年利率为11.34%，二年期的年利率为13.14%，八年期的年利率更高达17.64%。此外，三年(含三年)以上的定期整存整取储蓄还享受保值补贴。

我们不必把问题搞得太复杂，考虑到可能的降息因素，我们将未来的年利率设定为10%，而且两年以上的存款按单利计息，不

计复利.

你第 1 年存入的 100 元每年产生 10 元的利息,8 年共产生 80 元的利息。同理,你的第 2 个 100 元能产生 70 元的利息,你的第 3 个 100 元能产生 60 元的利息,依次类推,你的第 8 个 100 元也能产生 10 元的利息。这样,到了第 9 年时,你的利息已达到了

$$80+70+60+50+40+30+20+10=\frac{(80+10)\times 8}{2}=360(\text{元}),$$

再加上本金 800 元,你的本息和是 1 160 元。

这是一个什么样的数字?如果你把它存在银行里,每年将为你带来 116 元的利息,而不是银行所答应你的 100 元!

问题还不止如此。银行至少在三个方面赚了你的钱:

(1)当你在世的时候,它吃掉了你的部分利息;

(2)当你不在世的时候,它吃掉了你的全部利息;

(3)无论你在世还是不在世,它已经吃掉了你的本金。

银行惟一要承担的,是利率风险,可是在当时看来,利率上扬的概率要大于下降的概率,其期望所得已远远超出人们的想象。

可是,造化弄人,随着物价的逐步走低,银行存款的利率持续下降,不出一年的时间,一年期储蓄的利率就跌破了 10%,偶然性对银行来说,扮演了一个残酷的角色,而储户最终也没有因祸得福,拿到银行所许诺的回报。

有人常常讲,这一辈子从小学到大学,学了十五六年的数学,到工作后没看出它有多大用处;可是,等到真正需要开动你的大脑,运用你的数学思维的时候,你却相信了自己的直观,跟着感觉走了。

一部数学发展史,其实就是人们不断发现问题和解决问题的历史,它是人类智慧的结晶。无论是从有限到无限的飞跃,还是从确定性到随机性的变迁,无不给人以启迪,促进人类思维方式的升华。数学能让你受益终生的,不是她的定理,不是她的计算,而是

她的思维方式,她的洞察力和创造力。

在现实生活中,像上面这种似是而非的事例不胜枚举。本书之所以选择概率统计作为一个切入点,就是因为在数学的各个分支学科中,没有哪一个学科会像概率统计一样,到处充满着对传统思维模式的挑战,闪烁着理性思辨的光芒。在这里,凭直觉往往只能得出错误的结论,而正确的解答又大大出乎意料之外,有的甚而与所谓"常识"相矛盾。

十几年枯燥的数学计算和机械的理论证明,也许已磨平了你智慧的棱角,但我们要说,这不是你的错,更不是数学的错!本书的目的,就是通过现实生活中大量生动的、有趣的事例,来说明数学思辨的过程,还数学以本来面目,让你的思维插上理性的翅膀,让你的大脑在智慧的天空翱翔。

为了适应不同层次的读者的需要,本书对一些必要的概念和数学公式在文中都作了简单的介绍,不需要读者具备初等概率论的知识;本书中的所有理论推导都局限在初等数学的范围内,并辅以文字说明,对数学公式不感兴趣的人在阅读时完全可以跳跃过去而不影响对内容的理解。本书是一部面向大、中学生和社会大众的通俗而又不失科学性的作品。

在本书的成书过程中,得到了北京大学郑忠国教授、南京航空航天大学朱梧槚教授、解放军理工大学训练部薛通部长、政治部席印章主任的关心和支持,并在理论和实践两方面给予了深层次的指导,在此谨向他们表示衷心的感谢,并借此机会向所有曾经给予我们帮助的朋友们表示诚挚的谢意!

如果您在阅读本书的过程中有什么批评与建议,欢迎您和我们联系,我们的 E-mail 地址是:njsharp@sina.com。

姚泽清　顾红芳

2001 年 12 月

目 录

彩票，想说爱你不容易

1998 年 8 月，电脑销售传统型中国体育彩票在江苏的第一位百万大奖得主诞生了。在此后的短短几年的时间内，彩票已造就了 200 余位百万富翁，一夜暴富的神话在社会上掀起了一股彩票狂潮。

由于中奖与否的不确定性，所以各种报章上竞相开设“彩经”专栏，各种“预测”文章纷至沓来，概率统计成了时髦的话题。那么，你手中的一注彩票中大奖的概率究竟有多少呢?

以 200072 期大扩容前的江苏体育彩票为例，它的对奖号码共有 7 位数字，前 6 位每位各有 0～9 十个数字可供选择，第 7 位为特别号，共有 0～4 五个数字可供选择，只有当这 7 位数字与中奖号码完全相同时才能赢得最高金额可达 500 万元的特等奖。

由于中奖号码的产生共有

$$10^6 \times 5 = 5\ 000\ 000(\text{种})$$

可能性，故一注体育彩票中大奖的概率只有五百万分之一，而目前这一概率已随着体育彩票特别号的大扩容已降到了一千万分之一。

这是一个什么样的概率? 2000 年上半年，南京市区因各类交通事故而死亡的人数达 128 人，若每日在南京市区活动的人口以 280 万人计，则一个人一天之中在南京街头死于交通事故的概率就有四百万分之一。因此，说中大奖比出门遇上交通事故而致死的可能性还要低，一点也不过分。

从 2000 年上半年开始发行的江苏风采电脑福利彩票，其中奖规则与体育彩票略有不同，彩民可从 1 到 35 中任意选取 7 个数字

来构成对奖号码.这 7 个数字不能重复,只有当这 7 个数字与中奖号码完全相同时(不考虑先后次序)才能最后赢得大奖。

由于中奖号码的产生共有

$$C_{35}^{7}=\frac{35!}{7!\ 28!}=\frac{35\times34\times33\times32\times31\times30\times29}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}=6\ 724\ 520(种)$$

可能性,故一注福利彩票中大奖的概率不足六百万分之一。

为了达到吸引彩民的目的,福利彩票最初的发行宣传工作曾在中奖号码不排序上做足了文章,但这丝毫无助于改变其中奖概率偏低的事实。有人曾在报章上发表文章,抓住福利彩票最初几期大奖不断的事实,用中奖注数与投注总数之比来说明福利彩票的中奖率高于体育彩票,闹了以频率代替概率的笑话,这种说法随着后面几期大奖的不断轮空也就烟消云散了。

历史上的第一个概率论问题

实际上,概率论的起源与博彩有着密不可分的关系。意大利数学家和赌徒卡丹诺(Girolamo Cardano,1501—1576)在1564年写成的《机遇博弈》一书中就已提出了所谓"胜率"的概念,尽管它与概率还不是一回事。

历史上的第一个得到系统研究的概率论问题,是在1654年7月到10月间由法国商人贡博和梅雷提出的赌徒分赌金问题。

梅雷的基本问题是:甲、乙两人以掷硬币赌输赢,掷出正面甲得一点,掷出反面则乙得一点,积满三点者赢得全部赌注。现甲已得两点,乙只得一点,赌局意外中止,两人应怎样分配赌本才合理?

梅雷将这个问题交给了当时法国著名的数学家帕斯卡(Blaise Pascal,1623—1662),帕斯卡与另一位法国大数学家费尔马(Pierre de Fermat,1601—1665)通信讨论了这一问题,后者以"费尔马大定理"而著称于世。两人在不同的模型下运用组合理论对这一问题给出了各自的答案。

帕斯卡认为,若再掷一次,甲胜,则甲应得全部赌注;甲负,则甲应与乙平分赌注。而这两种情况发生的可能性都是$\frac{1}{2}$,故甲应得

$$1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

的赌注。

费尔马认为,要结束比赛,最多再掷两次即可,有4种等可能情形,即甲连胜、甲先胜后负、甲先负后胜、甲连负。前3种情况都是甲胜,故甲应得

$$1\times\frac{3}{4}+0\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

的赌注。

1655年，荷兰物理学家、数学家惠更斯（Christian Huygens，1629—1695）到巴黎访问期间听说了这件事，对概率论产生了浓厚的兴趣，决定自己也来研究这一问题。1657年，他发表了《论机会游戏中的计算》一书，尽管它比卡丹诺的遗著《机遇博弈》晚成书近1个世纪，但由于后者直到1663年才得以面世，故《论机会游戏中的计算》当之无愧地成为了历史上第一部概率论著作。

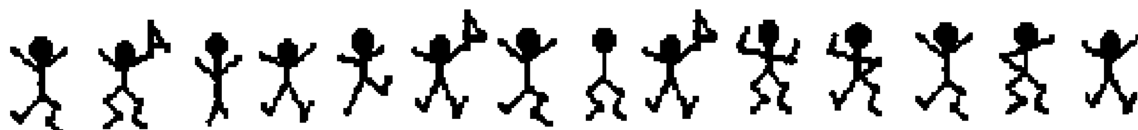
惠更斯在书中除解决了许多有趣的实际问题外，还在帕斯卡和费尔马的计算结果的基础上引进了离散型随机变量的均值——数学期望的概念，即一个人如果赢得总数 a_i 的概率是 p_i，$i=1,2,\cdots,n$，则他可望赢得的总数为

$$\sum_{i=1}^{n}a_ip_i=a_1p_1+a_2p_2+\cdots+a_np_n。$$

跳舞的小人

除了博彩，概率论的方法在很多方面的使用都有着悠久的历史。英国侦探小说家柯南道尔（Arthur Conan Doyle，1859—1930）在小说《归来记》中，就曾讲述了大侦探福尔摩斯所遇到的这样一个情场奇案。

马场村庄园的丘比特先生在花园里发现了一张纸条，上面画着一群跳舞的小人。她的妻子埃尔茜看到这封密码信后惊恐万分，当场昏死过去。



福尔摩斯拿到这张纸条后，首先发现第4、第6、第9和最后1个位置上所画的小人是完全一样的，除了手中多出的一面小旗。从小旗的分布来看，它应该起着分隔单词的作用，故福尔摩斯断定，这4个小人应代表英文字母中最常见的字母E。

“可是，现在最难的问题来了。”福尔摩斯在事后分析案情时说，“因为除了E以外，字母按出现次数排列的顺序大致为T，A，O，I，N，S，H，R，D，L，但是T，A，O，I出现的次数几乎不相上下。要是把每一种组合都试一遍，那会是一项无止境的工作。所以，我只好等来了新材料再说。”

好在随后神秘的小人不断出现，福尔摩斯在其中一组不带小旗的5个小人中发现第2和第4个都是E。这个单词可能是sever（切断），也可能是lever（杠杆），还可能是never（决不），而用never来回答一项请求的可能性极大，故福尔摩斯找到了字母N，V，R。

接着,他又将一个数次出现的两头是E、中间是3个别的字母的单词确定为埃尔茜的名字ELSIE,并在以“埃尔茜”结束的带有恳求语气的一句话中,断定名字前面的一个以E结尾的4个字母的单词为come(来)。这样,第一张纸条就变成了:

□M □ERE □□E SL□NE.

作为在纸条上出现了三次的第一个小人,就只能是字母A。而第二个单词的开头也只能是H。至此,这群跳舞的小人就彻底撩开了它的面纱:

AM HERE. ABE SLANE.(我已到达。阿贝·斯兰尼。)

福尔摩斯对这起牵涉到埃尔茜婚前秘密的事一直都采取袖手旁观的态度,直到他看到阿贝·斯兰尼最后画的一行小人:

ELSIE, PREPARE TO MEET GOD.(埃尔茜,准备见上帝吧。)

频率与概率

100多年前，柯南道尔就注意到了每个英文字母出现的频数是不一样的，其排列的顺序与现代学者研究的结果相差无几(如H与R，D与L的先后次序略有出入)。下表就是由G. Dewey在统计了438 023个字母的文字材料后得到的一份英文字母频率表，发表于1970年。

字母	频率	字母	频率	字母	频率
E	0.126 8	L	0.039 4	P	0.018 6
T	0.097 8	D	0.038 9	B	0.015 6
A	0.078 8	U	0.028 0	V	0.010 2
O	0.077 6	C	0.026 8	K	0.006 0
I	0.070 7	F	0.025 6	X	0.001 6
N	0.070 6	M	0.024 4	J	0.001 0
S	0.063 4	W	0.021 4	Q	0.000 9
R	0.059 4	Y	0.020 2	Z	0.000 6
H	0.057 3	G	0.018 7		

从表中可以看出，前6个字母出现的频率就占到了全部字母的52.2%，其中仅头3个字母E，T，A就超过了30%。看来，无论“过去”和“现在”，“吃”(eat或ate)都是最重要的。

当然，在一篇具体文章中，每个字母出现的频数会有所不同，排序结果也会出现某些差异，这就是频率的随机波动性。所以福尔摩斯对于他所得到的第一个样本，采取了审慎的态度。但是，随

着样本数的不断增大，频率会逐渐稳定于某个常数，这个常数就是我们所关心的概率。

早在3个世纪前，瑞士数学家伯努利(Jakob Bernoulli，1654—1705)就在依概率收敛的意义上，证明了 n 次独立重复试验中事件 A 发生的频率，当 n 趋向于无穷大时，趋向于事件 A 发生的概率 $P(A)$，这就是概率论中的第一个极限定理——伯努利大数定律。

虽然当那本包含了这一定律的著作《猜度术》于1713年出版时，伯努利已经去世了8年，但他从此奠定了概率论作为一门独立的数学分支的基础。因此，在实际问题中，我们可以用频率来作为概率的估计值，当然这只有在 n 充分大(即试验次数充分多)的时候才是有效的。

汉字的用字频率

至于汉字，到目前为止，还没有一个权威的频率统计表。20世纪70年代前后，曾有不少人对《毛泽东选集》1～4卷中出现的汉字进行过手工统计，其中有一份资料显示，“毛选”四卷中共用字66万个，其中不重复的单字2 981个，出现次数在2 300次以上的有50个，占总字数的39.0%。

下面即为这50个汉字的出现频率表。

单字	频率	单字	频率	单字	频率
的	0.052 6	们	0.009 3	为	0.005 2
是	0.018 2	了	0.009 0	就	0.005 2
一	0.016 3	有	0.009 0	以	0.005 0
国	0.014 2	地	0.008 4	产	0.004 9
民	0.011 8	党	0.007 0	于	0.004 7
不	0.011 8	个	0.007 0	对	0.004 7
和	0.011 2	我	0.006 8	日	0.004 5
在	0.010 9	要	0.006 1	命	0.004 4
中	0.010 9	大	0.005 9	动	0.004 4
人	0.010 6	义	0.005 8	革	0.004 3
这	0.010 1	军	0.005 6	反	0.004 3
战	0.009 7	争	0.005 4	方	0.004 2
主	0.009 4	政	0.005 3	上	0.004 2

续表

单字	频率	单字	频率	单字	频率
作	0.004 1	而	0.003 9	来	0.003 6
时	0.004 0	之	0.003 8	同	0.003 5
能	0.004 0	他	0.003 6	力	0.003 5
阶	0.004 0	会	0.003 6		

汉字号称有 8 万多个,但常用字却并不多,"毛选"中只用了不足 3 000 个字,恐怕是很多人没有想到的。从表中可以看出,前 14 个单字出现的次数就占了总字数的 20.7%,其中排名第一的"的"字更是独领风骚,平均每 19 个字中就出现一次。

当然,由于时代背景和语言习惯的不同,"毛选"中一些单字出现的频率偏高(如"战"、"争"等),但"毛选"作为现代汉语的范文,这一统计结果还是有一定的参考价值的。

古典概型

在概率论的初创时期,所用的模型大多是等可能概型,即所谓古典概型。其特点是试验中所有可能的结果可以划分为一些基本事件,而每个基本事件发生的概率都相同。

若记 n 为基本事件的总数,k 为事件 A 中所包含的基本事件数,则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}。$$

在等可能概型的计算中,人们会发现这样的情况,那就是用两种不同的观点来进行演算的时候往往会出人意料地得到两个不同的结果,这常常令初学者感到苦恼。下面的弹子球游戏就是一个典型的例子。

一个男孩有一个弹子球,一个女孩有两个弹子球。他们向远处的同一个目标把球弹出,球离目标最近者胜。假定男孩和女孩的弹球技巧完全相同,测量也完全精确而足以定出胜负,那么女孩胜出的概率是多少呢?

第一种观点:女孩有两次机会弹球,而男孩只有一次,男孩和女孩的水平又是相当的,故女孩赢球的概率为$\frac{2}{3}$。

第二种观点:把女孩的球记作 A 和 B,男孩的球记作 C,则有下列4种情况:

(1)A 球和 B 球都比 C 球更接近目标;

(2)仅 A 球比 C 球接近目标;

(3)仅 B 球比 C 球接近目标;

(4)C 球比 A 球和 B 球都接近目标。

这4种情况中的前3种都是女孩赢，所以女孩赢球的概率是$\frac{3}{4}$。

为什么会出现这种情况？两种观点中哪一种是错误的呢？如果我们把所有可能的情形一一列出，就很容易找到答案。

按3个球接近目标的程度，实际上有6种等可能的情形，即

$$ABC、ACB、BAC、BCA、CAB、CBA,$$

而前4种情况均为女孩胜出，故女孩赢的概率为

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}。$$

那么第二种观点又错在哪里呢？它所分析的第1种情况实际上包含了 ABC 和 BAC 两种情形，第4种情况也包含了 CAB 和 CBA 两种情形，而第2种和第3种情况却分别只包含了 ACB 与 BCA 一种情形，所以这4种情况发生的概率是不一样的，不能使用我们开头所讲的公式。

最有可能的性别组合

已知一个家庭中有2个孩子，问这2个孩子为一男一女的概率是多少？你可能会说，这里总共只有3种可能的情形：

(1)2个男孩；

(2)2个女孩；

(3)1个男孩和1个女孩。

所以这2个孩子为一男一女的概率是$\frac{1}{3}$。

如果你这样回答，你就犯了和上面弹子球游戏中同样的错误。实际上，如果给每个孩子编上号(例如按照他们的出生次序，第一个出生的为1号，第二个为2号)，则会出现4种等可能的情形：

(1)1号是男孩，2号还是男孩；

(2)1号是男孩，2号是女孩；

(3)1号是女孩，2号是男孩；

(4)1号是女孩，2号还是女孩。

由于一男一女占了其中的2种，所以它发生的概率为$\frac{1}{2}$，而不是$\frac{1}{3}$。

若一个家庭中有4个孩子，如果我告诉你最有可能的性别组合是3—1组合(3个同性，1个异性)而不是2—2组合(2个男孩，2个女孩)，你一定会感到惊讶。

实际上，一个家庭中有2个男孩、2个女孩的概率是

$$\frac{C_4^2}{2\times2\times2\times2}=\frac{3}{8},$$

而有 3 个男孩、1 个女孩或 3 个女孩、1 个男孩的概率是

$$\frac{2\times C_4^1}{2\times2\times2\times2}=\frac{1}{2},$$

而余下的$\frac{1}{8}$则是 4 个孩子性别相同(4 个男孩或 4 个女孩)的概率。

同样的,在有 6 个孩子的家庭中,最有可能的性别组合是 4—2 组合而不是 3—3 组合,前者发生的概率为$\frac{15}{32}$,后者发生的概率为$\frac{5}{16}$,余下的依次为 5—1 组合($\frac{3}{16}$)、6—0 组合($\frac{1}{32}$)。

从上面可以看出,孩子性别相同的概率随着孩子人数的增加而急剧减少,如果你在街上遇到了一位久未谋面的老朋友,你只记得他家里至少有 2 个孩子,但是是男是女已记不清了,而你又不想显得你把他的情况忘得一干二净,你完全可以冒昧地问一句:“你儿子现在怎么样了?”因为你至少有$\frac{3}{4}$的把握。

测测你的手气

如果你是一位桥牌手，你会很关心你拿了一手什么牌。关于一手桥牌中4种花色的最有可能的分布，其答案也同样违反直觉。即使是有多年实战经验的桥牌手，也往往会猜想手头的13张牌中最有可能的花色分布是4,3,3,3，而答案却是4,4,3,2。

这一类概率的计算是一件需要技巧的工作，下面我们就以这两个组合为例来具体说明一下演算过程。

从52张牌中选出13张，共有C_{52}^{13}种选法；而这13张牌要形成4,4,3,2组合，首先要确定它们所对应的花色。

我们先从4种花色中任选1种作组合数字中的2（例如红心），再从余下的3种花色中任选1种作3（例如黑桃），余下的2种花色（方块、梅花）就是我们所要的4,4，所以花色的选择共有4×3种。

接着我们再从13张红心中选出2张（共有C_{13}^{2}种选法），13张黑桃中选出3张（共有C_{13}^{3}种选法），13张方块、13张梅花中各选4张（各有C_{13}^{4}种选法），则4,4,3,2组合出现的概率就是

$$\frac{4\times3\times C_{13}^{2}C_{13}^{3}C_{13}^{4}C_{13}^{4}}{C_{52}^{13}}\approx0.2155,$$

换句话说，这种组合大约每4到5圈就可以拿到一次。

至于4,3,3,3组合，通过类似的分析我们可以得到它出现的概率为

$$\frac{4\times C_{13}^{4}C_{13}^{3}C_{13}^{3}C_{13}^{3}}{C_{52}^{13}}\approx0.1054,$$

所以它平均9到10圈才能拿到一次，其发生的可能性甚至不如

5,3,3,2 组合,后者平均 6 到 7 圈就可以拿到一次。

有人常常宣称他曾经拿到过一手完满的牌(13 张牌花色完全相同),对这种天方夜谭式的故事你完全可以一笑置之,因为如果不是有人作弊,这种事情发生的概率只有

$$\frac{4}{C_{52}^{13}}=\frac{1}{158\ 753\ 389\ 900}。$$

即使你 1 秒钟就能翻出一手牌,这种情况平均也要 5 000 年才会出现一次,而 5 000 年前我们的祖先还处在刀耕火种的阶段,不识桥牌为何物也。

实际推断原理

在现实生活中，我们会遇到一些小概率事件，但它应该是在大量重复试验中才会产生的。很少有人会担心一颗预报要落在地球上的陨石会落到自己头上，即使像作为世界第一大城的南京城这样大的范围，这块陨石落在其中的概率也只有 0.000 000 127（南京明城墙所围区域面积与地球表面积之比），除非我们面临的是一场横扫地球的流星雨。

在概率论中，我们所讨论的都是随机现象，其结果在个别试验中应呈现出不确定性，而在大量重复试验中又具有统计规律性。如果一个在理论上发生概率非常小的事件在单个试验中就出现了，我们完全有理由怀疑这样的结果是否具有随机性。

因此，在实际问题中我们认为概率很小的事件在一次试验中几乎是不可能发生的，这就是所谓实际推断原理。

下面我们来看一个例子：

某一天，你开车进了一个过去从未去过的机关停车场，发现里面共有 18 个车位，其中有 8 个位置停了车，而有一连 10 个位置是空着的。这时，你可以随便找个地方把车停下吗？

由于车辆的停放太有规律，我们当然有理由怀疑它的随机性。我们先假定车辆的停放是随意的，则一连 10 个位置空着共有 9 种可能的情况（从 1～10 号车位空着到 9～18 号车位空着），故这种放法出现的概率为

$$\frac{9}{C_{18}^{8}}=\frac{1}{4\ 862}\approx 0.000\ 2。$$

如此小概率的事件竟然发生了，可以肯定关于停车位置是有具体

规定的。

实际推断原理也常常用于法庭断案上。警方怀疑甲向乙出售毒品，理由是疑犯乙某日曾从银行账户中取出 12 618 元，而第二天疑犯甲的账户上就多出了 12 618 元。由于这是间接证据，控方律师便适时地使用了实际推断法。

"根据警方的调查，疑犯乙取款之前账户上共有 24 515 元，因此他可以从账户中取走 1～24 515 元，且每种情况都是等可能的。而他实际取款的数目却是疑犯甲进账的数目，如果这是一种巧合的话，它发生的概率只有

$$\frac{1}{24\ 515}.\text{"}$$

虽然控方律师立论的基础还有待讨论，例如他的等可能假设，但它已足以使陪审团相信，这不是一种巧合。

教士的愤怒

这里有一个关于古罗马教士伽利亚尼的故事。

一天，在那不勒斯，教士伽利亚尼看见一个来自巴西利卡塔的人，他一边摇着装在杯子里的3颗骰子，一边打赌说他能掷出3个六点来；而事实上，他马上就掷出了3个六点来。

"这也许是侥幸吧。"伽利亚尼想。

接着，这个人把骰子放回杯子里，又打了一次赌，结果又掷出3个六点来。随后他又摇了第三次、第四次、第五次，每次都掷出3个六点来。

"他娘的，"教士终于忍无可忍，大声地叫了出来，"他的骰子里灌了铅！"事实也果真如此，骰子被灌了铅，3颗骰子成了3个不倒翁。

伽利亚尼教士的激动是有道理的，尽管在他那个时代概率论还没有产生，他也不知道什么是实际推断原理，但他还是作出了一个合情推理：这种结果的产生不可能是随机的。

如果来自巴西利卡塔的人具有公平的骰子，并能公正地使用这些骰子，则用3颗骰子一次掷出3个六点（相当于用1颗骰子连续掷出3个六点）的概率为

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216},$$

而这是一个很小的概率，教士也许已经开始怀疑骰子是否公道，但出于礼貌，还是把他当作绅士来对待。

当来自巴西利卡塔的人第二次掷出3个六点来的时候（相当于1颗骰子连续掷出6个六点），这个概率已经降到了

$$\left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{1}{46\ 656},$$

但教士仍然保持着沉默。

可是当他把这个惊人的事件一直重复了 5 次的时候(相当于 1 颗骰子连续掷出 15 个六点),教士终于失去了耐心,因为现在这个概率只有

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{15} = \frac{1}{470\ 184\ 984\ 576}。$$

这是一个可能性只有近五千亿分之一的事件,已经远远超出了被人们认为是奇迹的那种可能性,于是教士得出了自己的结论,使劲地嚷了起来。

男女性别比

在很早的时候人们就发现，新生儿中男婴的比例要略高于女婴的比例。在英国经济学家、人口统计学的创始人之一格兰特(John Graunt，1620—1674)于1662年出版的《关于死亡表的自然的和政治的观察》一书中，就明确指出在伦敦的新生儿中，男婴要比女婴多$\frac{1}{13}$。

过去，由于许多人都相信生男生女有着同等的机会，故把这一切都归结于随机误差。到了1710年，一位名叫阿布兹诺特的学者，在英国皇家学会上宣读了一篇论文，向这一传统观点发出了挑战。

他在这篇题为《从两性出生数观察的规律性所得关于神的意旨存在的一个论据》的文章中，研究了从1629年到1710年伦敦出生的婴儿数，发现在这连续的82年中，每年都是男多于女。于是，他提出了两种假设：

(1)生男生女纯属偶然，两者具有同等的机会；

(2)由于“神”的意旨，生男的机会大于生女。

阿布兹诺特指出，如果(1)成立，则在一年内出生的男婴数多于女婴的概率不超过$\frac{1}{2}$，而连续82年出现这种情况，其发生的概率应不超过

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{82},$$

这就像要求一注需要对准一亿亿亿个数字才能中大奖的彩票中奖一样，恐怕连上帝也要哭着说：“我这辈子大概是见不到了。”因此

我们有理由否定(1)而接受(2)。

阿布兹诺特的工作在概率统计史上具有划时代的意义，他首次运用统计数据去验证某一假说是否成立，并用合情推理的方式解决了这一问题，为日后成为统计推断中一个重要分支的假设检验的诞生首开先河。

在人口统计中，出生婴儿的性别比具有特殊的意义，因为它是决定全体人口性别比的基础。各国出生婴儿性别比相对稳定，一般为105:100或106:100左右。就人类总体而言，在1 000个婴儿中，大约有515个男婴，485个女婴。实际上，在人类的胚胎期，这一比例还要更高，但由于自然流产和产后一个月内死亡的大多是男婴，所以才形成了这一比例。

中国大陆总人口中的男性对女性的性别比，在1982年第3次人口普查时为106.3:100，1990年第4次人口普查时为106.6:100，到了2000年第5次人口普查时则达到了106.74:100，呈逐年上升之势，且出现1～4岁组女性死亡率高于男性的现象，这与重男轻女的陋习应该有着密切的关系。

伯特纳德箱

在很多赌博游戏中，若相信你的直觉将会是不幸的。1889 年由一位德国数学家提供的伯特纳德箱，就是一个很好的例子。

庄家在你面前放了 3 个箱子，1 个箱子里装着 2 枚金币，1 个箱子里装着 2 枚银币，还有 1 个箱子里装着 1 枚金币、1 枚银币。3 个箱子随意地混在一起，现在庄家从中任取 1 个箱子，然后对你说："这个箱子里装着 2 枚相同的硬币，不信我和你赌一把。"

这时，你也许会不屑一顾地说："这不公平，3 个箱子中明摆着有 2 个装着相同的硬币，你赢的概率是$\frac{2}{3}$，我不会上你的当。"

庄家说："今天看来我是遇到高人了，我们还是来公平地玩一把吧。"说着，庄家把手随意伸进了 1 个箱子。

"现在，我从这个箱子里随便拿出 1 枚硬币来，您瞧，这是块金币。好了，这个箱子里已经不可能是 2 枚银币了，因此，它只有两种情况：要么是 2 枚金币，要么是 1 枚金币、1 枚银币。如果我现在和你赌这个箱子里装着 2 枚相同的硬币，应该很公平了吧？"

你一想，不错，这回这个箱子里装着 2 枚相同硬币的概率已经降到了$\frac{1}{2}$，于是你同意了。可是几个回合下来，你却吃惊地发现，庄家平均每 3 个回合就要赢 2 次。如果这个游戏是公平的，怎么这么快庄家就赢了我的钱？难道箱子中装着 2 枚相同硬币的概率还是$\frac{2}{3}$？

是的，庄家骗了你，实际上具有相同可能性的情况是 3 种而不是 2 种。庄家从箱子中取出的那枚金币，可能是装着 1 枚金币、1

枚银币的箱子中的金币，也可能是装着 2 枚金币的箱子中的第 1 枚金币，也可能是装着 2 枚金币的箱子中的第 2 枚金币。所以这个箱子中装着相同硬币的概率依然是$\frac{2}{3}$。

有人可能会不理解，为什么在这个问题中要区分装着相同金币的箱子中的 2 枚金币？如果我说从装着 1 枚金币、1 枚银币的箱子中抽出 1 枚硬币共有 2 种情况（1 枚金币或 1 枚银币），你不会反对，那么凭什么从装着 2 枚金币的箱子抽出 1 枚硬币就变成了 1 种情况呢，它当然也是 2 种：1 号金币或 2 号金币（如果我们把它们标上序号的话）。

伯特纳德箱后来经美国数学家沃伦·威弗改造为一个简单的卡片游戏，你可以用 3 张 2 面空白的卡片来代替 3 个箱子，1 张 2 面均画上圆圈，1 张均画上黑点，1 张 1 面画圆圈、1 面画黑点，然后你按与上面同样的步骤与别人赌 2 面的图形一致，其效果是一样的。

幸运鸟笼

幸运鸟笼是在美国和西方很多赌场中常见的一种赌戏，其历史可以追溯到19世纪初的英国。其玩法是在一个鸟笼里装着3颗骰子，然后翻转笼子使骰子滚动。玩的人可以赌从1到6中的任一数，有几颗骰子出现你所说的数时，你就可以赢得你所赌的钱数的几倍。

参加者往往会这样想："如果这个笼子里只有1颗骰子，那我赌的数6次中才会出现1次。如果有2颗骰子，则6次中就会出现2次。现在有3颗骰子，6次中我就会赢3次，这是一个公平的赌博！"

可是你转念又会一想："不对，我的机会可能还要好一些。如果我赌了1个数，比如是4，赌10元钱。要是有1个骰子的点数是4，我就赢了10元钱；要是有2个骰子的点数是4，我就赢了20元钱；要是有3个是4呢，我就赢了30元钱，真是一本万利的好买卖！"

如果你真的这么想，那就难怪赌场的老板会赚得盆满钵溢了。在赌场里，老板为招徕顾客，不断大声叫喊着："每次3个人赢，3个人输呐。"下面我们就来看一看，老板是如何从这个貌似公平的赌博中赚取赌客的钱的。

现在假设有6个人参赌，每人赌1个不同的数字，每次赌10元钱。

如果3颗骰子显示出来的数字互不相同，则这种赌戏确实是公平的。老板每次从3位输家手中赢取30元钱，转手又要付给3位赢家30元钱，只做了回过路财神。

可所幸的是，常常有几颗骰子显示出相同的数字。如果 3 颗骰子中有 2 颗是同一个数，则有 4 人未猜中数字，老板就从这 4 位输家手中赢得 40 元钱，付给两位赢家 30 元钱，赚回 10 元钱；如果 3 颗骰子都是同样的数，老板就从 5 位输家手中赢得 50 元钱，付给惟一的赢家 30 元钱，赚回 20 元钱。

3 颗骰子落下的全部可能情况共有

$$6^3 = 216(\text{种}),$$

又可细分为 3 种情形：

(1)3 颗骰子点数互不相同。这只有

$$6 \times 5 \times 4 = 120(\text{种})。$$

(2)有 2 颗相同。这共有

$$C_3^2 \times 6 \times 5 = 90(\text{种})。$$

(3)3 颗骰子的点数完全相同。这共有 6 种。

所以在上述模型下，老板和赌客每玩一次，就可以赢得

$$0 \times \frac{120}{216} + 10 \times \frac{90}{216} + 20 \times \frac{6}{216} = \frac{170}{36} \approx 4.72(\text{元}),$$

老板就这样积少成多发了大财。

加法定理

看完上面的分析，有人可能会说，从老板的角度来看，我能理解庄家是如何赚取赌客的钱的，但从赌客的角度来看，我不明白他刚开始参赌时的想法有什么错，难道他赢钱的机会不是$\frac{1}{2}$吗？

是的，他赢钱的概率远不足$\frac{1}{2}$。在3颗骰子落下后正面所显示出来的所有216种可能中，他只在下列3种情况下能够赚钱：

(1)有1颗骰子显示出他所赌的数。这种可能性共有

$$C_3^1 \times 5 \times 5 = 75(\text{种})。$$

(2)有2颗骰子显示出他所赌的数。这种可能性共有

$$C_3^2 \times 5 = 15(\text{种})。$$

(3)3颗骰子都显示出他所赌的数。这只有1种可能。

3种情况合起来，共有91种可能，所以他赢钱的概率为

$$\frac{91}{216} \approx 0.421\ 3,$$

远低于$\frac{1}{2}$。

"可是，"有人可能会继续说，"掷1颗骰子他赢钱的概率为$\frac{1}{6}$，掷3颗骰子不刚好是

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

吗？"

这个问题问到了症结上。如果记事件A为"第一颗骰子出现所赌的数"，B为"第二颗骰子出现所赌的数"，C为"第三颗骰子

出现所赌的数”,则顾客赢钱的概率即为 A,B,C 中至少有一个发生的概率。

在概率论中,计算这样的概率不是简单地将这 3 个事件发生的概率加起来,而是通过下列加法公式

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC)$$

来进行的,其中 $P(AB)$为事件 A,B 同时发生的概率。

只有当 A,B,C 三者互不相容(即 A,B,C 中任意两个事件不可能同时发生,或它们的交集为空集)的时候,公式

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

才成立,因为此时加法公式中的后 4 项全为 0。

在上述问题中,1 颗骰子出现顾客所赌的数不影响另 1 颗骰子出现这个数,所以 A,B,C 不是互不相容的,不能使用第二个公式。

"体彩"多连号之谜

自 1998 年江苏省电脑体育彩票发行以来,在开出的 6 位中奖号码中,连号现象层出不穷。其中最引人注目的是在相邻的两个或两个以上数位上出现同一数字的孪生现象,其极端情形,曾达到过四位同号(如 99046 期中奖号码 766661 中的 6666)和三重同号(如 200013 期中奖号码 662211 中的 66,22,11),成为"体彩"一道独特的风景线。

很多人对这一现象感到不可思议,下面我们就来看一看它出现的概率到底是多少。

首先我们来讨论一下不出现同号的情况有多少种。此时,第一位数字有 10 种选择,而第二位不能与第一位相同,故只有 9 种选择;第三位数字也不能与第二位相同,故也只有 9 种选择,其他以此类推。所以出现同号的概率为

$$1-\frac{10\times 9\times 9\times 9\times 9\times 9}{10^6}\approx 0.409\ 5。$$

由此可见,孪生号出现的概率约为 41.0%,而截至 2000 年底,在全部 175 个中奖号码中(含 7 个派送奖),出现同号现象的有 77 个,出现频率为 44.0%,频率略高于概率,两者基本吻合。

除此以外,还有的就是在相邻的两个或两个以上数位上出现连续自然数,如第 995490 期中奖号码 765490 中的 7654 等。以数字按递减方式出现为例,记 A_i 为"第 i 位上的数字比第 $i+1$ 位大 1",则出现递减数字的概率为

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5)=\sum_{i=1}^{5}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}P(A_iA_jA_k)-\sum_{1\leqslant i<j<k<l\leqslant 5}P(A_iA_jA_kA_l)+P(A_1A_2A_3A_4A_5)$$

$$\approx 0.376\,2。$$

同样，出现递增数字的概率也为 37.6%。可能有人会说，这三者加起来得 1.161 9，其概率已超过了 1，岂不成了非此即彼！

其实，出现孪生号、递减号或递增号这三件事不是互不相容的，例如，第 98022 期中奖号码 998977 中即出现了同号 99，77，也出现了递减号 98 和递增号 89，故同上面一样，要计算三者至少有一个出现的概率，不能简单地将三个概率加起来。

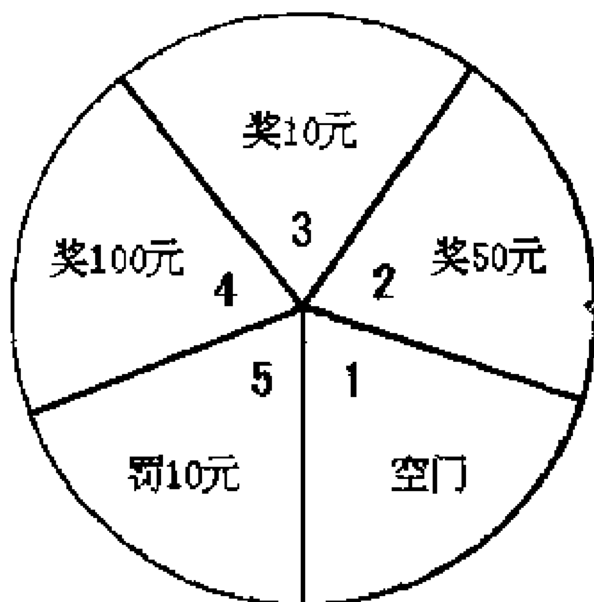
街头骗局(1)

我们经常可以在街头看到一些制造概率假象的骗局,前几年曾经盛行一时的一种扑克游戏便是一个很好的例子。

摊主手中拿着一副牌,地上放着一张纸,纸上画有 26 个连成一体的环状方格,格子里依次标上 1~26 的序号,旁边列出它所对应的奖值。游人只要从这副牌中任取两张,将上面的两个数字加起来,得和数 $n(2\leqslant n\leqslant 26)$,然后从图上找到 n 的位置,再按逆时针或顺时针方向(事先约定)走 n 步,所到的位置就是你的奖值,当然它有可能是负数,这时你就要往外掏钱了。

你一眼望去,就会发现格子里是奖多罚少,而且玩之前不必付任何费用,可以说是空手道的把戏,不免蠢蠢欲动。可是几个回合下来,你就会发现那些写着大额奖值的地方怎么也转不到,钱包里的钱倒是逐渐少了起来。

为了说明其是如何骗人的,我们给出它的一个简化形式。



假设摊主手中只有三张牌，分别为1,2,3。游人从中取出两张，例如1,3，得和4，然后从图上的4出发，按逆时针或顺时针方向再走4步，就到了你的奖区。从表面上看，图上的五个位置中只有一个是要游人赔钱的，似乎赌局对游人无限有利。

实际上，游人转到这五个位置的概率并不像人们想象的那样是完全一样的，1,2,3中任取两数求和共有3,4,5三种结果，加上正反两种不同转向共有六种情形，其中转到1,3的情形各有一种，转到5的情形却高达四种，而2,4则永远不可能达到。

如果摊主不怕把游人吓跑的话，他在2,4的任一位置上写上"奖1亿元"也无所谓，而游人每赌一次，其平均所得为

$$0\times\frac{1}{6}+10\times\frac{1}{6}+(-10)\times\frac{4}{6}=-5(元),$$

换句话说，你每玩一次平均就要损失5元钱！

街头骗局(2)

这是一种叫作“三张牌”的把戏,通常由三四个人合作完成,至今我们都可以在街头找到它的受害者。

摊主在地上放着三张牌,两边各为一张黑桃 A、一张梅花 A,中间一张是红心 A。他大声地对着路人叫喊着:“各位朋友来瞧一瞧啊看一看,是你的眼快,还是我的手快!”你不经意地停下了脚步,只见一位憨厚的小伙子已经蹲在地上,问摊主怎么个玩法,旁边还围上了几个看热闹的人。

摊主对小伙子说:“我马上把三张牌反扣过来,当着你的面调换三张牌的位置,如果你能指出红心 A 在什么地方,我就给你 10 元钱,否则你给我 10 元钱。愿赌服输,两不相欠,有在场的各位作证,怎么样?”小伙子点了点头。

当摊主笨拙地移动着三张牌的时候,细心的你发现红心 A 最终落在左边第一的位置,周围的人也齐声喊道“左边,左边”,可是那位小伙子却偏偏选择了右边第一的位置。等摊主把牌一一翻开,果真红心 A 在左边第一的位置,小伙子极不情愿地掏出了 10 元钱。

如此三次下来,固执的小伙子均拒绝了别人的帮助,三战皆北。聪明的你终于忍无可忍,亲自披挂上阵了。

这时摊主就像换了个人一样,双手敏捷地调换着牌的位置。当你终于发现你的眼疾不如他的手快时,你已经三次中输了两次。这时你开始明白,那个小伙子不过是一个媒子,是用来引你上钩的。

正当你发愣的时候,摊主一把按住你想从指定的牌上抽回的

手，轻声地说："这位朋友，我知道你在想什么。我现在给你一个扳平的机会：你先选出一张你认为是红心 A 的牌，我再翻出一张黑桃 A，这样真正的红心 A 就肯定在还没被翻开的两张牌中，你赢的机会就超过一半了，怎么样？"

你仔细一想，二中取一，赢的概率是$\frac{1}{2}$，再加上我的眼力，赢的机会确实超过一半了。可是几个回合下来，你还是输光了身上所有的钱。等到你想到这里面一定有什么鬼名堂的时候，这帮人已经作鸟兽散，没了踪影。

你知道问题出在哪里吗？当你将手指向三张牌中的某一张时，已经决定了你赢的机会是$\frac{1}{3}$，而摊主总是能从剩下的两张牌中翻出一张黑桃 A，因为他知道真正的红心 A 在哪里，翻开这张牌根本不会影响他的输赢。

他的输赢不会改变，你的输赢也就不会改变。这与先翻开一张黑桃 A，再让你选择一张牌是完全不同的，只有在后者你取胜的概率才是$\frac{1}{2}$。

生男生女之谜

张先生和张太太一直想要个儿子，可是却一连生了 5 个女儿。这次张太太又怀孕了，那么这个孩子是男孩的概率是多少呢？张太太说："我们已经有了 5 个女儿，这回总该是个儿子了吧！"

张先生说："你说得一点不错，我已经请教了专家，生女儿的概率大约为 0.485，而一连生 6 个女儿的概率只有

$$(0.485)^6 \approx 0.013 = 1.3\%,$$

所以我们下一个肯定是儿子。"

可是，他们的第 6 个孩子依然是个女孩。于是张先生得出一个结论："这些搞概率的都是卖狗皮膏药的。"

那么，问题究竟出在哪儿呢？

实际上，张太太生女儿的概率依然是 0.485，这与前面生了几个孩子，其中有几个男孩、几个女孩没有任何关系。

张先生所说的，只代表了张太太开始生育后会一连生 6 个女儿的可能性（此时尚未生育），当其逐一实现了以后，对下面生男生女却不会产生任何影响，这就像掷硬币掷出了正面，不会影响下一次掷出的是正面还是反面的道理一样。

在一个以青壮年男劳力为主的农业社会里，要想抑制人们生男婴的愿望是很困难的。为了达到每个家庭都有一个男孩的目的，有人提出了"生男即止"的办法，即若第 1 胎生出的是男孩，则不准再生；若生出的是女孩，则允许生第 2 胎，直到生出男孩为止，以后不许再生。

在此方案下，出生婴儿的性别比依然保持在 1:1 左右，且每对夫妻所生的孩子的平均数不会超过 2。记 X 为一对夫妇生育的孩

子数，则其均值为

$$\sum_{k=1}^{\infty} kP\{X=k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k(0.485)^{k-1}0.515 = \frac{1}{0.515} \approx 1.94(\text{个})。$$

实际上，妇女的育龄总是有限的，k 的取值一般不会超过 20；再考虑到高达 10%的不孕症患者以及不要子女等自然减员情况，这一产出数字应该在 1.7 左右，从理论上讲不失为一种既可以满足人们传宗接代的愿望，又可以达到控制人口目的的替代办法。

但是，由于这种做法带有明显的性别歧视的色彩，所以要作为一种政策来实行，是完全不可能的。

事件的独立性

如果一个事件的发生不会影响另一个事件发生的概率，我们就称这两个事件是相互独立的。这就像在大选之年一个英国婴儿的出生，不会影响美国总统选举的结果一样，除非这个婴儿是某位总统候选人的私生子，此时这两个事件就不独立了。

大多数人很难相信，一个独立事件发生的概率，会不受临近的同类独立事件的影响。在轮盘赌中深受欢迎的戴伦伯特系统，就是迎合人们的这种心理而设立的。

参赌者可以赌象牙球最终落在轮盘上的红色区域还是黑色区域，每赌输一次就加大赌注，因为人们相信下一次要赢的概率在增大；每赌赢一次就减少赌注，因为人们相信下一次再赢的概率在减小。人们给不停转动的小小象牙球赋予了生命，好像它真的能记住过去发生的事，当你赌输的时候它会感到深深的歉意，帮助你在下一次赢回来。

爱打麻将的人大多有这样的经历：越赌越输，越输越赌。“我就不信这个邪，轮也该轮到我了。”

实际上，每一次赌局，对你都是一个全新的开始，前面连输的次数不但不会提高你取胜的概率，还会影响你的心态，导致“昏招”的出现。如果你到现在还没有明白其中的道理的话，下面这个故事也许会对你有所启发。

一位医生在检查完病人后摇了摇头，“你病得很重，”医生对病人说，“在10个得这种病的人当中只有1个能够救活。”正当病人被这个消息吓得半死的时候，医生继续说：“但你是幸运的，因为你找到了我。我已经看过9个这样的病人，而他们都死了。”

与此相类似的，是在炮火连天的战场上行进中的战士对临时掩体的选择。早在第一次世界大战中就有许多老兵认为，藏在新弹坑中要比藏在老弹坑中安全，因为看起来两发炮弹不会接连落在同一个地方，他们相信新炮弹命中老弹坑的可能性比新弹坑要大。实际上，如果不是考虑到飞起的弹片，他们躺在战场上任何一个地方挨炸的概率都是一样的。

还有人试图用自己的行动去干预外面的现实世界。曾经有这样一个笑话：一位女士每天上班都要挤公交车，可是隔三差五地就要遇到小偷，不时有财物的损失。于是她丈夫在家苦思冥想了3天，终于想出了一个好办法。他每天一大早就悄悄地爬起来从他太太的皮包里拿走一块钱，因为他相信：一个人不可能在同一天内两次被偷！

股市与彩市

20世纪60年代，名噪一时的美国学院派股市分析家曾经宣称，用技术分析指导投资的正确性只有50%，而不用也有50%，自己花心思选股还不如干脆找条狗帮你选股。

该学派认为，股价围绕其内在价值上下随机波动，有如醉汉蹒跚的步伐，每天的行情都是独立展开的，其涨跌和走势毫无规律可循，因此，最好的市场策略就是简单地“守株待兔”，先买了再说。

实际上，股市的参与者是人，游戏规则的制定者也是人，股价的形成与基本面、资金面、投资人的心态密不可分。股价的涨落和近期盘面的变化有着密切的关系，它们之间不可能是相互独立的，至少每一天的开盘价都是以前一天的收盘价为基础的。

股市中的很多谚语，例如弱市中“久盘必跌”的道理，便是股民对盘局失去耐心的结果，盘得越久，积聚的做空能量就越大，下跌的概率也就越大，因此，上述随机行走的理论是站不住脚的。

而彩市则与股市不同，其各期的开奖结果是相互独立的，以往的经验对新一期的中奖号码毫无影响，因为机器不是人，它没有人的弱点。滚动的号球不会因为前面连续出现了几个“8”而将其打入冷宫，也不会因为“3”好久没露面而出手相救也让其风光一把，两者出现的机会在任何时候都是一样的。

彩市不是股市，它不懂得什么“量价配合”，也不懂得什么“支撑压力”，各种套用技术分析的方法来讨论彩号的走向的做法都是骗人的。

有人会说，我就是按照报上的彩经选号而中了个三等奖的，这里而应该是有规律的。实际上，如果彩号真的可以预测的话，各种

预言家就大可不必在那里为几十块钱的稿费而奔忙了，免得中大奖的人太多了钱不够分。

有些中大奖者会煞有介事地说，自己是如何地精心选号，如何地痴心不改，最后成为概率专家的。最近有位幸运儿则诚实得多，他承认中奖有运气的成分，以往他总是在同一地点买同一号码却始终没有中奖，最后他毅然决定改换门庭，结果否极泰来，充分验证了"人挪活、树挪死"的古训。只是我始终不能明了，摇号机好像与原先那家售彩点有仇，如果他不换一家买的话，摇号机会不会换一个号码。

因此，对于一些中奖者的现身说法，大可不必太过认真，因为那些五花八门的中奖秘诀，大抵不是自欺，便是欺人。

条件概率

在实际问题中，许多随机事件是相互关联的，一个事件的发生会影响另一个事件发生的概率。例如有 10 件产品，其中有 3 件为次品，现从中任取 1 件检验后不放回，再从剩下的 9 件中抽出 1 件，则这件产品为次品的概率就和第一件产品是否为次品有关。

当第一件产品为次品的时候，剩下的产品中只有 2 件是次品，所以第二件产品为次品的概率是$\frac{2}{9}$；当第一件产品为正品时，剩下的产品中还有 3 件是次品，所以第二件产品为次品的概率是

$$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}。$$

若记在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率为 $P(B/A)$，则条件概率与事件 A，B 同时发生的概率 $P(AB)$之间的关系为

$$P(AB)=P(A)P(B/A),$$

这就是概率论中的乘法定理。

当 A，B 相互独立时，由于事件 B 发生的概率不受事件 A 的影响，上述公式就化为

$$P(AB)=P(A)P(B)。$$

在 20 世纪五六十年代，曾经有一种摇着拨浪鼓走街串巷的小贩，其拿手好戏除了放洋画（幻灯片）外，便是一个用来让孩子们摸彩的小口袋。1 分钱可以从中摸 1 张，奖品五花八门，大奖为奶糖之类，好像没有空门。为了讨论问题方便，我们假定口袋中有 10 张纸片，其中有 1 张是奶糖。

现在有一个小孩子拿了 2 分钱来摸奶糖，他应该怎么摸？

第一种方案：小孩先从口袋里摸出 1 张，不放回再摸 1 张。记

事件

$$A_i = \text{“第 } i \text{ 张不是奶糖”}, i = 1, 2,$$

则他摸不到奶糖的概率为

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) = \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} = 0.8。$$

第二种方案:小孩先从口袋里摸出 1 张,放回后再摸 1 张。此时 A_1 与 A_2 相互独立,故小孩子摸不到奶糖的概率为

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = 0.81,$$

因此,小孩应采取不放回抽取的方式,即第一种方案。

黄金分割与股价

股市中投资者的心理倾向对股价的影响，最为有趣的莫过于所谓支撑位和阻力位了。

本来，支撑和压力是股市分析家为讨论问题的方便而设立的，一般为一些整数关口（如2 000点）、涨跌幅分数位、趋势线位或密集成交区位，它们一经指出后，又反过来影响投资人的操作，使猜想变成了现实。

当股价已有相当跌幅，专家指出在某点位会止跌企稳时，大部分投资人会采取观望的态度，于是抛盘减轻，股价在到达该点位时触底反弹。

此时，在此点位卖出的股民就会因自己的判断失误而后悔，持币观望者会为错过了一次建仓的良机而惋惜，而在此点位买进的多头在欣喜之余也会责备自己当时为什么不多买一点。

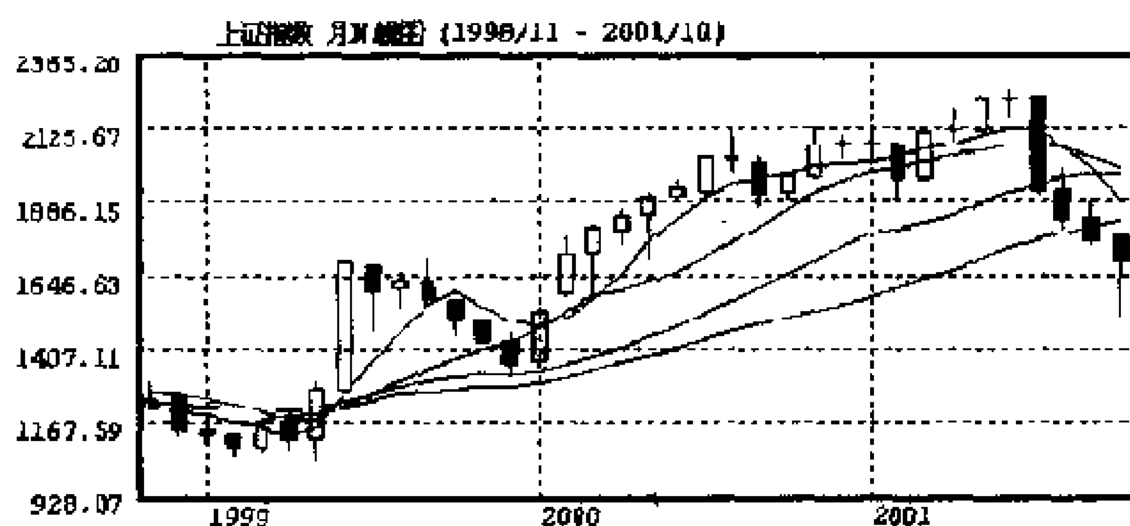
因此，当股价重新回到这一位置时，上述三类投资者就会抓住机会一同买进，带动股价再次掉头向上，一个真正的支撑位便这样诞生了。

黄金分割本来与股市毫无关系，自古希腊以来一直有人认为其比值0.618在造型艺术上有美学价值，故在建筑、艺术等许多领域都可以看到0.618的身影。黄金分割在投资人中流传开后，同样演变为一种测定买卖时机的特殊心理位。下面就是黄金分割影响股价涨跌的概率的一个实例。

从1999年“5·19行情”开始的一轮大牛市，到2001年6月见顶回落时为止，上证指数共有1 198点的涨幅（最低1 047点，最高2 245点），其长度的0.618为740，故其涨幅的黄金分割位

$$1\,047 + 740 = 1\,787$$

为一理论支撑位。



上证指数在此点位附近盘整了近一个月才破位下行，但最终还是在其0.382位置(1 504点)上方找到了支撑，在政策面的支持下重返1 650点，不过1 787点便成为悬在头顶的一个阻力位了。

抓阄的公正性

在计划经济时代，由于物资短缺，一些不能均分的紧俏商品的分配常常采取抓阄的方式来解决。在20世纪70年代初，当以燃气代替燃煤的煤气包在城市中出现的时候，其分配就是一个比较典型的例子。

现在假定有一个10个人的机关单位，分到了1个煤气包，领导一想，把它分给谁都不合适，于是决定写10张纸条，其中只有1张写着“有”，其余9张都写着“无”，让大家按照年龄大小一一来摸。

对于这个抓阄次序，不同的人产生了不同的看法。

排在第一的老王心里想：“十里挑一，我哪里能摸到，说起来是照顾我，最后还不便宜了别人。”

排在最后的小李心里想：“前面那么多人，随便哪个摸到都没我的份，谁叫我刚来没几年！”

那么事实又如何呢？

尽管老王和小李的想法截然相反，但有一点他们是正确的：前面的人是否摸到“有”，直接影响了后面的人摸到“有”的概率。对小李而言，如果前面有一个人摸到“有”，则他摸到的概率为0；如果前面没有人摸到“有”，则他摸到的概率为1，情况并没有他想象的那么悲观。

如果记事件

$$A_i=\text{“第 } i \text{ 个人摸到‘有’”},$$
$$\overline{A_i}=\text{“第 } i \text{ 个人摸到‘无’”},$$
$$i=1,2,\cdots,10,$$

则第一个人摸到“有”的概率为

$$P(A_1)=\frac{1}{10},$$

第二个人摸到“有”的概率为

$$P(A_2)=P(\overline{A_1}A_2)=P(\overline{A_1})P(A_2/\overline{A_1})=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10},$$

第三个人摸到“有”的概率为

$$P(A_3)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})P(A_2/\overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

$$=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}/\overline{A_1})P(A_2/\overline{A_1}\,\overline{A_2})=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10}。$$

一般地，可以证明每个人摸到“有”的概率都是$\frac{1}{10}$，所以抓阄本身是公平的。上述结论对所有即开型的摸奖活动都是有效的。当然这只是指摸奖开始之前人人的机会均等，一旦活动开始，后来者中奖的概率就会随着先到者摸奖结果的变化而变大或变小。

摸奖过程中的心理误区

在现实生活中，没有任何一项活动能像博彩活动那样，暴露出人们对概率的无知。在一些即开型奖券的发行现场，人们往往会发现这样一种现象：有的摊位前人满为患，有的则门可罗雀。一个摊位如果有人中奖，便会引来一大堆跟风的人，前面中奖的人越多，后面跟进的速度就越快，好像这里真的是块风水宝地一样，我们称之为“从众”心态。

实际上，任何一种即开型奖券，其设奖总数都是一定的。前面开出的奖项越多，后面的人中奖的概率就越低。

我们在摸彩场所，经常可以听到广播里发出的服务小姐甜美的声音：“刚才有位老大爷，只花了 10 元钱，只花了 10 元钱，就摸走了 10 万元的大奖！”

如果满腹经纶的你非要和这位老大爷斗一斗手气，那就大可不必了，因为大奖都让人摸走了，你还摸个什么劲！

因此，一组奖券中不断有人满载而归，恰恰不应该是你跟进的时机，而应该是你回避的时刻。同理，一组奖券中不断有人空手而返，恰恰不应该是你退出的时候，而应该是你进入的良机。有的人专门盯着中奖数很少的奖组来扫尾，用的便是这种计策。

1999 年在南京的一处福利奖券摸奖现场，就曾经发生过这样一件事：有位妇女买了一整盒奖券回家拆开了一大半，都没有发现像样的奖项，失望之余便把剩下的 8 张尚未拆封的奖券拿回现场要求退货，遭到了拒绝。

正在双方争执不下之际，有位小伙子为了息事宁人，掏出了 16 元钱买下了这 8 张奖券。结果，他中了一辆夏利轿车。

对此，我们不同意那种“不是你的财，想得也得不到”的宿命论说法，但确实为这位妇女感到惋惜，如果她对概率论的知识稍微有一点了解的话，她就不会落入这种功亏一篑的尴尬境地了。

有人会说：“我买‘体彩’老是不中，看来我应该坚持买下去，总有出头的一天。”实际上，这与上面的情况完全是两码事：摸奖活动中前一张奖券是否中奖影响下一张；而在摇号开奖中前一期是否中奖不影响下一期！

不中奖的人继续买，是为了翻本；中了奖的人还要继续买，那又是为了什么呢？表面上看是认为“手气”好，应该趁热打铁，实际上还是犯了与上面同样的错误，许多中了奖的人最后都成倍地还了回去，只好以行善积德来自慰了。

所以，“见好就收”不是人人都懂的道理。

配对问题

马先生写了 n 封信，又拿了 n 个信封写上了地址，便把信纸胡乱地塞进信封里寄了出去。现在的问题是：没有一张信纸装对信封的概率是多少？恰有 r 张信纸装对了信封的概率又是多少？这就是历史上有名的配对问题。

现将这 n 个信封和 n 张信纸从 1 到 n 分别编上号，记“恰有 r 个对号”的概率为 P_r，则“没有 1 个对号”的概率就是 P_0。记事件

$$A_i = \text{“第 } i \text{ 号信纸恰装入第 } i \text{ 号信封”},$$

则在 A_i 发生的条件下，第 j 号信纸($j \neq i$)共有 $n-1$ 个信封可供选择，故

$$P(A_j/A_i) = \frac{1}{n-1},$$

A_i 与 A_j 同时发生的概率

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_i/A_j) = \frac{1}{n(n-1)}。$$

类似地，r 张指定号码的信纸被装入同号信封的概率为

$$\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-r+1)},$$

则由加法定理，“至少有一个对号”的概率

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)$$

$$= n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{n(n-1)} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!},$$

从而

$$P_0 = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}。$$

至于 P_r，由于指定的 r 张信纸都装对号的概率为

$$\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-r+1)},$$

余下的 $n-r$ 张信纸没有1张对号的概率为

$$\sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!}$$

（即在 P_0 中以 $n-r$ 代替 n），而 r 张信纸对号共有 C_n^r 种选法，故

$$P_r = C_n^r \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-r+1)} \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!}。$$

口供可信吗

在西方国家的法庭上，陪审团通常会被告知，如果他们有合理的理由认为犯罪嫌疑人犯下了某一罪行，就可以判其有罪。至于什么叫"合理"，那就实在是一件仁者见仁、智者见智的事了。在各种定性的理由中，最容易让人采信的莫过于嫌犯的口供了。

罗马法把被告人的自供称为"证据之王"，中国古代也把以刑讯方法取得的被告人口供作为定罪的最有力的证据。欧洲中世纪后期盛行的形式证据制度认为，被告人的自供是完善的、完全的证据，而刑讯逼供也成为取证的重要方法。西班牙第一任宗教法庭庭长 Tomas de Torguemada 认为，犯人的交代就是其有罪的充分证据，即使这交代是逼供的结果。

美国科学作家罗伯特·马修斯首次应用概率论的方法，对法庭中这一传统的证据来源提出了挑战。他的一项最让人感到意外的结论是：在某些情况下，嫌犯的招供更有利于认为他无罪的看法，而不利于认为他有罪的看法。

如果记 A 为"嫌犯有罪"，C 为"嫌犯已招认有罪"，则在嫌犯已招认有罪的情况下其确实有罪的概率为

$$P(A/C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)P(C/A)}{P(CA)+P(C\overline{A})}$$

$$=\frac{P(A)P(C/A)}{P(A)P(C/A)+P(\overline{A})P(C/\overline{A})},$$

故要使嫌犯的交代增大其有罪的概率，即

$$P(A/C)>P(A),$$

须有

$$P(C/\overline{A}) < P(C/A),$$

其中 $P(C/\overline{A})$为一个无罪的人招认有罪的概率,$P(C/A)$为一个有罪的人承认有罪的概率。

反之,当一个无罪的人招认有罪的可能性大于一个有罪的人承认有罪的可能性时,嫌犯招认有罪反而会减少了其有罪的概率。例如,与易受他人暗示或更易依从他人的人相比较,那些经过抗拒审讯方法的专门训练的恐怖分子,其招认有罪的概率是非常小的。当一嫌犯轻易招供时,反而令其为真正的恐怖分子的可能性大打折扣,除非你有其他的证据作佐证。

在英国,一系列宣布恐怖分子有罪的著名判决都是以口供为依据的,但由于怀疑口供的真实性而最后都被推翻,就是基于这种考虑。

癌症诊断≠死刑宣判

癌症历来都是一个让人谈虎色变的话题，由于除了一些妇科癌瘤以外，大多数恶性肿瘤都具有较高的死亡率，所以在一般人看来，一旦在癌症试验中反应呈阳性，无异于宣判了死刑。那么实际情况又是怎样的呢？

由于对癌症成因了解的缺乏和技术条件的限制，绝大多数诊断方式都不可能避免误诊现象的发生。一种诊断方式，如果能够做到把健康人误诊为病人以及把病人误诊为健康人的概率都控制在1%以内，这种检验方法就应该说是一种比较好的方法了。

下面我们就在这个精度下，对一名在肝癌试验中反应呈阳性的人的未来命运作一判断。

肝癌在中国的发病率大约为每10万人中有12人，其死亡率在男性中占癌症的第3位，在女性中占第4位。其临床诊断通常为肝功能试验以及特殊的酶学检查等。现在假定有一种检验方式，满足上述精度，若记 A 为“试验反应为阳性”，$\overline{A}$ 为“试验反应为阴性”，B 为“受检者确有肝癌”，$\overline{B}$ 为“受检者未患肝癌”，则我们有

$$P(A/B) = 1 - P(\overline{A}/B) = 0.99,$$
$$P(A/\overline{B}) = 0.01,$$
$$P(B) = 0.001\,2。$$

现在有一受检者在此试验中反应为阳性，则他确实患有肝癌的概率为

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A/B)}{P(B)P(A/B) + P(\overline{B})P(A/\overline{B})}$$

$$= \frac{0.0012 \times 0.99}{0.0012 \times 0.99 + 0.9988 \times 0.01} \approx 0.1063。$$

有人可能会提出疑问,既然误诊率为1%,则他得肝癌的概率应为99%,为什么算出来的只有10.63%呢?

实际上,这里所说的99%,是把确实患有肝癌的人明确诊断为肝癌患者的概率,即当 A 发生时 B 发生的概率;而我们要求的是被诊断为肝癌患者的人确实患有肝癌的概率,即当 B 发生时 A 发生的概率,两者不是一回事,不能混淆。

虽然患病的概率不足11%,但也不可掉以轻心,因为这和一般人的患病概率(0.12%)相比还是偏高的。应该尝试多种检验方法,以彻底排除癌症的可能性,在最坏的情况下也可以达到早诊断、早治疗的目的。

医疗方案的选择

某年,有一种急性传染病在各地迅速蔓延,得病的人中有一半死了,还有一半自愈。为了制止情况的进一步恶化,医学专家紧急研制了 A,B 两种血清以抵御病毒。

由于几乎没有时间对这两种血清进行临床试验,只好招募了11位志愿者试用了这两种血清,结果注射了 A 血清的3位病人全部好了,注射了 B 血清的8位病人中则有7人痊愈,1人死亡。

现在有位病人也决定试用其中一种血清,那么他该如何选择呢?

血清 A 虽然弹无虚发,但毕竟样本太少;血清 B 虽然拥有相对较多的样本,但$\frac{7}{8}$的治愈率似乎不如血清 A 的100%来得让人放心。

显然,在手头证据尚不充分可靠的情况下,即使凭直观来作出选择,也是很困难的。

这时我们不妨换一个思路,使我们有可能对要解决的问题作出明确的决断。既然我们还不能确定血清 A 是否真的有效,那么我们就不妨假定血清 A 既无益也无害,对病人来说仅仅充当了某种"安慰剂"的角色。

此时,这3位注射了血清 A 的患者都痊愈的概率是多少呢?

由于未接受治疗的病人有$\frac{1}{2}$的机会自愈,因此由乘法定理,这3位病人全部自愈的概率为

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}。$$

同样地，在血清 B 无效果的前提下，8 位注射了血清 B 的患者中有 7 位痊愈、1 位死亡的概率是

$$C_8^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 \times \frac{1}{2} = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{32},$$

其中 8 代表死亡者是谁有 8 种可能的选择。

显然，后者发生的概率远小于前者发生的概率，由实际推断原理，与其相信血清 B 无效，还不如相信血清 A 无效。由于

$$\frac{1}{8} : \frac{1}{32} = 4,$$

因此血清 A 无效的可能性是血清 B 无效的可能性的 4 倍，这位病人在现有的数据下显然应选用血清 B。

几何概型

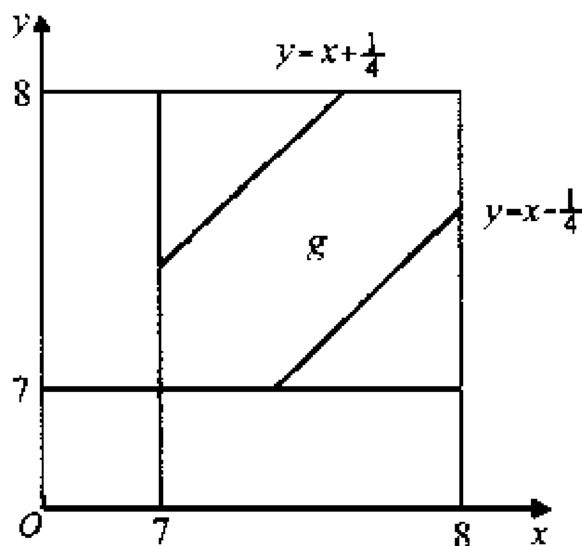
几何概型是古典概型的一种推广，它把一些随机试验归结为在某个平面区域 G 内随机投点，并认为这个点落在 G 内任一部分的可能性是相同的(只要它们的面积是相等的)。

若记 S_G 为平面区域 G 的面积，S_g 为 G 内某一部分 g 的面积，则点落在 g 内的概率为

$$p = \frac{S_g}{S_G}。$$

下面我们来看一个相遇问题。

有两个大忙人约好在晚上 7 点到 8 点之间会面，但谁也不能给出一个到场的确切时间。于是两人约定，先到者等候 15 分钟后如不见后来者，即可自行离去，免得耽误时间。现在的问题是，他们相遇的概率是多少？



若用 x 表示第一个人到达的时间，y 表示第二个人到达的时间，则

$$7 \leqslant x \leqslant 8, 7 \leqslant y \leqslant 8,$$

这就是我们所要的区域 G。

显然，当

$$x \leqslant y \leqslant x + \frac{1}{4}$$

或

$$y \leqslant x \leqslant y + \frac{1}{4}$$

时，两人相遇，此时(x, y)落在如上页图所示的小区域 g 内，其面积为

$$S_g = 1 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{16}。$$

由于 G 的面积

$$S_G = 1,$$

所以两人相遇的概率为$\frac{7}{16}$，略小于$\frac{1}{2}$。

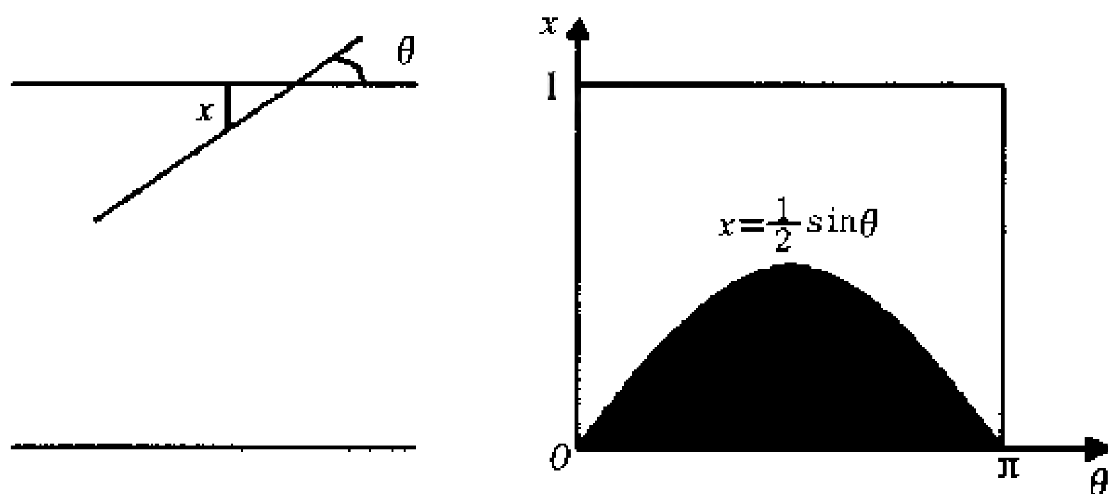
蒲丰投针问题

1777年,法国博物学家、进化思想的先驱者蒲丰(George Louis Leclerc de Buffon,1707—1788)提出了著名的投针问题,成为几何概型的第一个经典例子,对概率论的发展起了推动作用。

蒲丰在平面上画了一些平行线,线与线之间的距离为2英寸。然后他把一根长为1英寸的针随意地投向该平面,那么针与平行线相交的概率是多少?

如果用 x 来表示针的中点到最近一条平行线的距离,θ 表示针与这条线的夹角,则通过 θ 和 x 值就可以确定针的位置。由于

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant x \leqslant 1,$$



所以中点坐标(θ, x)落在一个边长为 π 和 1 的矩形内,其面积为 π。

显然,要使落下的针与离它最近的平行线相交,只须满足条件

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\sin\theta,$$

即(θ, x) 落在图中的阴影部分。用阴影部分的面积除以整个矩形的面积,就可以得到针与平行线相交的概率为

$$\frac{\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin\theta d\theta}{\pi}\cdot\frac{}{} = \frac{1}{\pi}。$$

让蒲丰感到惊奇的是,这一结果竟然与圆周率 π 有关,这是他始料未及的,从而在理论上打开了一条利用随机试验来估计圆周率的新路子。

掷出来的 π

π 是人类认识到的第一个特殊常数，现存于世的有关圆周率的最早文字记载是公元前 1650 年左右在古埃及产生的莱因德纸草书中，其中取

$$\pi = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \approx 3.16。$$

古希腊阿基米德约在公元前 240 年从计算圆内接和外切正多边形周长来确定圆周率。他从正 6 边形开始，逐步计算到正 96 边形周长，最后取两位小数确定 $\pi = 3.14$。约公元 150 年，托勒密在《数学汇编》中给出

$$\pi = 3.141\ 6。$$

公元 5 世纪，中国南北朝时的祖冲之给出了圆周率精确到 8 位数字的上下界：

$$3.141\ 592\ 6 < \pi < 3.141\ 592\ 7,$$

还提出了圆周率的密率

$$\pi = \frac{355}{113}。$$

作为当时世界上最好的结果，他将这一记录保持了近 1 000 年。

在蒲丰出生的前一年，梅钦已将 π 值计算到小数点后 100 位，但还没有任何一个人尝试过用概率手段来估计圆周率。蒲丰投针试验的意义在于，如果利用频率与概率的关系，就可以得到 π 的一个近似计算公式

$$\pi \approx \frac{\text{投掷总次数}}{\text{碰线次数}},$$

而这一结果竟然可以靠投针试验来实现，确实让人感到惊讶。

那么，π 真的可以掷出来吗？尽管早在 1901 年，意大利数学家拉泽里尼就宣布他通过投针试验得到了 π 的误差在小数点后第 6 位的估计值 3.141 592 9，其后也不断有人重复这一工作，但这一切都遭到了美国犹他州国立韦伯大学的学者巴杰等人的质疑，有的甚而怀疑这些人是否真的做过这些试验。

实际上，要得到拉泽里尼的结果并不难，比如任何人都可以宣称自己作了 34 080 次投针，其中有 10 848 次碰线，从而得到

$$\pi = \frac{34\,080}{10\,848} = \frac{355}{113} \approx 3.141\,592\,9,$$

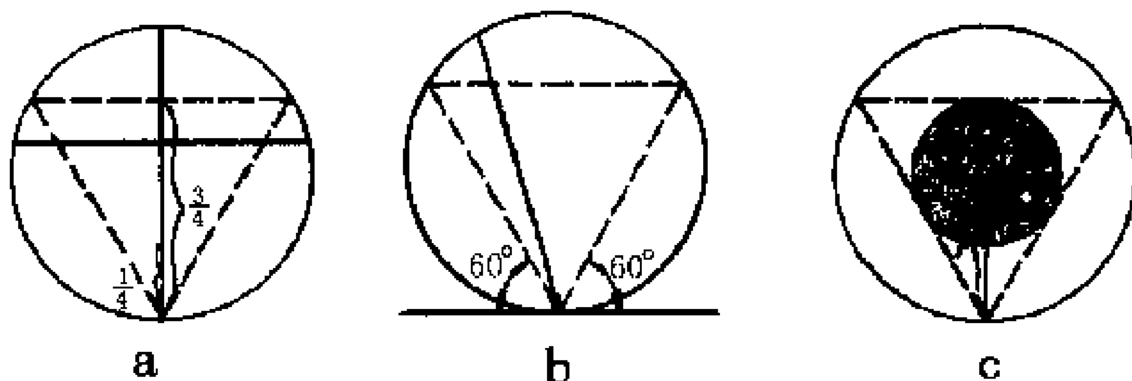
而这一结果只不过是祖冲之密率的翻版，只是其分子、分母同时扩大了 96 倍而已。

更为糟糕的是，如果你再作第 34 081 次投针的话，若碰线，则 π 的估计值为 3.141 395 5；若不碰线，则其估值为 3.141 685 1，与真值相去甚远，因此，用概率来计算 π，其象征意义远远大于它的实际意义。

贝特朗悖论

随着蒲丰投针问题的提出，几何概率逐步发展起来，但到了19世纪末，却出现了一些自相矛盾的结果，其中最著名的就是贝特朗悖论。

贝特朗的问题本身并不复杂：在圆内任作一弦，求其长超过圆内接正三角形边长的概率。让人头痛的是：此问题竟然有三种不同的解！



第1种解法：由于对称性，可指定弦为水平方向。作垂直于此方向的直径，则只有交直径于$\frac{1}{4}$与$\frac{3}{4}$处之间的弦，其长才有可能大于内接正三角形边长（见图a）。设所有交点是等可能的，则所求概率为

$$\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)/1=\frac{1}{2}。$$

第2种解法：由于对称性，可预先固定弦的一端于圆的最底端，则当弦与过此端点的切线的交角在60°～120°之间，其长才合乎要求（见图b）。设所有方向都是等可能的，则所求概率为

$$\frac{120-60}{180}=\frac{1}{3}。$$

第3种解法：弦被其中点位置惟一确定，只有当弦的中点落在半径缩小了一半的同心圆内，其长才合乎要求(见图c)。设中点位置处在圆内任一点都是等可能的，则所求概率为

$$\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2/\pi r^2 = \frac{1}{4}。$$

这个问题之所以有不同的解答，是因为当一随机试验有无穷多个可能的结果时，有时很难客观地界定“等可能”这一概念，在不同的理解下便会有不同的结果，这是由几何概率的逻辑基础的不严密性造成的，它从一个侧面推动了20世纪初概率论公理化运动的兴起。

中立原理

受古典概型的影响,在哲学、心理学、统计学、经济学和许多应用科学领域内,曾经长期流行着一种“理由不充足原理”,后来被英国经济学家凯恩斯(John Maynard Keynes,1883—1946)在《论概率》一书中更名为“中立原理”,其具体的意义为:如果我们没有充足的理由来说明某件事的真伪,我们就取对等的概率来定这一事物的真实值。

这一貌似公正的原理,曾经使许多伟大的数学家和哲学家陷入糊涂之中,因而在历史上声名狼藉。现在就让我们来看一看将中立原理应用于核战争问题,将会引起怎样的混乱。

美国“9·11”恐怖事件发生以后,本·拉丹声称拥有核武器,核战争的威胁再次摆到了人们的面前。那么,公元2002年内发生核战争的概率是多少?根据中立原理,回答是$\frac{1}{2}$。那么原子弹不会落在美国国土上的概率是多少?回答是$\frac{1}{2}$。不会落在英国国土上的概率是多少?回答也是$\frac{1}{2}$。不会落在法国国土上的概率是多少?回答还是$\frac{1}{2}$。

如果我们将这一原理应用到联合国的所有189个成员国,则原子弹不会落在其中任何一个国家的概率是

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{189} \approx \frac{1}{7.85 \times 10^{56}},$$

这是一个分母大到要用天文数字来表示的数,而用1减去这个数就得到其中至少有一个国家遭到原子弹袭击的概率,看来2002年

人类是在劫难逃了。

即使在严格的数学领域，这样的笑话也层出不穷。现在假设有一个物体藏在山洞中，我们只知道它是一个立方体，边长在 1 米到 3 米之间。取中间值 2 米，我们有理由认为它是边长的最佳估计。

接着我们来考虑这个正方体的体积，它应该在 1 立方米到 27 立方米之间，我们同样也有理由认为 14 立方米是体积的最好估计。因此，我们就得到了这样一个怪立方体，它的边长是 2 米（对应的体积为 8 立方米），而体积却是 14 立方米（对应的边长为 2.41 米）！

当然，中立原理在概率论中是可以合法使用的，不过这只有当所讨论的事物具有某种对称性时才能奏效。例如一枚硬币的正、反面具有几何对称性，可以认为两面出现的概率相等，这同样也适用于有 6 个对称面的立方体骰子。在不知道客观情况是否具备这种对称性时，就贸然使用这个原理，往往会导致荒谬的结果。

帕斯卡赌注

因中立原理使用不当而造成谬误的一个著名的例子，就出自17世纪法国数学家和哲学家、概率论奠基人之一的帕斯卡之手。

帕斯卡晚年热衷于宗教，他一方面反对在科学上滥用权威，主张要符合理智；另一方面又反对在神学上使用理智，认为信仰比理智的境界要高一层。为了证明他的说法，他在其《随感录》第233个想法中就将中立原理应用于基督徒对上帝的忠诚上，提出了这样一个问题：

一个人无法决定他是接受还是拒绝教堂的教义。教义也许是真实的，也许是骗人的，这就有点像掷硬币，两种可能性都有。那么站在中立的立场上，他所得到的报应是什么呢？

假定这个人拒绝了教堂的教义。如果教义是骗人的，则他什么损失也没有；如果教义是真实的，那么他将在地狱中遭受无穷的痛苦。如果以0代表无所得也无所失，以-1代表下地狱，则他的平均所得为

$$0\times\frac{1}{2}+(-1)\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}。$$

假定这个人接受了教堂的教义。如果教义是骗人的，则他就什么也得不到；如果教义是真实的，那么他就能进入天堂享受无穷的快乐。如果以0代表无所得也无所失，以1代表上天堂，则他的平均所得为

$$0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}。$$

于是，帕斯卡确信，这一决策游戏的报应无限有利于将宝押在

教义是真实的这一结论上，因此他认为接受教堂的教义才是上上策。在西方，关于二项式展开的“杨辉三角形”是以帕斯卡的名字命名的，那么，他的这一推理的可靠性是否就像他的“帕斯卡三角形”一样牢不可破呢？

对于中立原理是否合法地应用于帕斯卡赌注，科学家们争论了好多年，直到法国哲学家丹尼斯·林德罗对此提出了具有深刻挑战性的问题才得以平息。

林德罗认为，世界上除了基督教外还有许多世界性宗教（如伊斯兰教、佛教等）和民族宗教（如犹太教、印度教、神道教等），它们都宣称只有接受该教教义才是得到拯救的惟一条件。如果帕斯卡赌注成立的话，那么它对其他宗教也是适用的，一个人就应该成为所有宗教的信徒。可是你如果在信奉基督的同时也信了被基督教视为异端的其他宗教，你还能上天堂吗？

钱包游戏

一位数学教授和两个数学系的学生走到了一起，教授对两个学生说：

“你们两个先把自己的钱包掏出来放在桌上，我来教你们一个新游戏。等我把你们钱包里的钱数清点完了以后，钱少的那位可以赢得钱多的人钱包里的所有钱。”

学生甲：“嗯……让我好好想一想。我身上只有10元钱，如果他的钱比我少，我就输掉了这10元钱，可是如果他的钱比我多，我就赢了他的钱，而赢的钱数却超过了10元，这样我赢的要比输掉的多，所以这个游戏对我有利。”

麻烦的是学生乙也在这么想：“我身上有多少钱我是清楚的，不超过20元吧。如果我的钱比他多，我就输掉了我的钱，可是如果我的钱比他少，我就赢了他的钱，要是他身上有1 000元钱，我还不发了大财，真是一笔好买卖。”

现在的问题是：怎么可能有这样一种赌局，它对双方都有利呢？

任何一个赌博系统，要么是公平的（如掷硬币赌正反），要么就是偏向于一方的，两者必居其一。由于不知道对方的钱到底是比自己多还是比自己少，所以这两位学生犯了一个同样的错误，那就是认为这两种可能性是对等的，说到底还是中立原理在作怪。

由于我们无法具体地给出各人身上所带钱数的概率分布，所以我们还不能用概率论的手段来简单地对此作出一个合理的解释，除非我们用对策论的观点来看待这一问题。

从对策论的观点来看，除非我们预先知道某个人平时总爱带

较多或较少的钱,它在没有任何其他信息的情况下应该是一个公平的比赛。我们可以假定两个人带有从0到任意数目的钱(例如500元),按此假定就可以构造出一个由两个人所带钱数的二维数组所构成的矩阵,而这个矩阵是对称的,所以比赛结果不会偏向于任何一位学生。

这个游戏最早出自于法国数学家莫里斯·克拉依奇克1953年出版的《数学娱乐》一书,他当时用领带代替了钱包。有两个人都宣称自己的领带好,于是请来了第三个人作仲裁。

第三个人说:"要我来裁决高下可以,但胜者必须拿出自己的领带给败者作为安慰。"于是两个争执不下的人都这样想:我知道我的领带值多少钱,我也许会失去它,但我也有可能得到一条比它更好的领带。于是,一个双方都认为对自己有利的游戏就这样诞生了。

上帝之手

在经历了一次大地震后，人们惊奇地发现一座高大的烟囱还巍然屹立着。除了建筑学家在忙着研究它的材料学和力学原理以外，统计学家也在思考着这样一个问题：这座烟囱下次地震后还能存在的概率是多少？

100%？显然不可信。50%？好像犯了中立原理的错误。但我们只有一次试验的结果，数据明显不足，怎么办？

于是有人提出了一种解决方法，这种方法战后在一些西方国家的工程技术界颇为流行。

"那就让上帝来帮我们作两次模拟试验吧！烟囱有可能倒，也有可能不倒，两种情况各出现一次，这样的假设应该是合情合理的吧？这样我们就有了三次试验，其中有两次不倒，所以下次地震后烟囱不会倒塌的概率为$\frac{2}{3}$。"

果然，在经历了第二次地震的洗礼之后，这座烟囱依旧岿然不动。

"现在我们已经有了两次试验的结果，虽然我们还不能说它下次会百分之百的不倒，但我们对它应该更有信心。"

于是统计学家再次借助上帝之手作了两次模拟试验，一次倒，一次不倒，这样烟囱能经受住下一次地震的考验的概率就上升到了$\frac{3}{4}$。

一般的，如果烟囱在前 m 次地震中均未倒塌，则它在第 $m+1$ 次地震中不会倒塌的概率就是

$$\frac{m+1}{m+2}。$$

如果你现在就相信了这位先生的话，那么你就要犯极大的错误。个中的缘由只要看一看下面的例子就可以了。

一个小女孩今年11岁，按照上述规则，她明年还活着的概率为$\frac{12}{13}$。女孩的祖父今年已68岁了，而按照同样的规则，他明年还活着的概率为$\frac{69}{70}$。爷爷生存的机会已超过了孙女，这有可能吗？

其实，这种做法并不是什么新东西，而是在2个世纪以前就出现的"一般连续规则"的一个特例。

这个规则是由法国数学家、天文学家拉普拉斯（Pierre Simon de Laplace，1749—1827）为嘲弄他的反对者而建立的。其本质，不过是中立原理的一个自然延伸，因为当 $m=0$ 时（即不经过任何试验），它的取值就是$\frac{1}{2}$。拉普拉斯本人就曾经以这个规则为基础，算出太阳第二天升起的概率为$\frac{1}{1\ 826\ 214}$。

乌鸦与麻雀

俗话说："天下乌鸦一般黑。"不过要证实这句话却相当困难。如果我们能找到一只白乌鸦，事情倒简单了，把整个结论推翻了事。问题是迄今为止我们还没有看到一只白乌鸦。

于是，亨普尔(Carl G. Hempel)教授于1937年提出了一个解决方案，它涉及到概率论、形式逻辑和科学方法论。

就概率论而言，如果我们看到了100只乌鸦是黑的，那么要断定"所有乌鸦都是黑的"这一点，证据似乎还不充足；但如果我们看到了100万只乌鸦都是黑的，那么这条结论成立的概率就大大提高了，且每当我们发现1只新的黑乌鸦，这一概率就会随之增大，关于这一点大概谁也不会提出异议。

问题是，随着人类对自然环境的破坏，在城里已经找不到太多的乌鸦了，于是亨普尔想了一个变通办法。

就形式逻辑而言，"凡是 X 的都是 Y 的"这句话等价于"凡不是 Y 的都不是 X 的"，就像"凡是中国人都是黄皮肤的"等效于"凡不是黄皮肤的都不是中国人"一样。因此，要证明"所有乌鸦都是黑的"，只需要证明"所有不黑的物体都不是乌鸦"就行了。

现在我在窗前看到了一只麻雀，它是褐色的，也肯定不是一只乌鸦，这就证实了"所有不黑的物体都不是乌鸦"这一结论，从而也就为"所有乌鸦都是黑的"提供了一个例证。

不仅如此，亨普尔教授指出，你只要坐在客厅里，看见自家的红地毯，显然它不是黑的，也不是乌鸦，同样可以提高"所有乌鸦都是黑的"这一结论的正确性。难怪尼尔森·古德曼先生对此评论道："坐在屋里不受风吹雨打就可以研究鸟类学，确实是一个诱人

的前景。”

亨普尔的悖论确实是一个令人头痛的问题，它是无约束地利用逻辑性而导致的结果。就概率而言，在地球上不是黑色的物体比起乌鸦来实在多得多，因此“一个不黑的物体不是乌鸦”比起“一只乌鸦是黑的”来说，对证明“所有乌鸦都是黑的”这一结论的贡献是微不足道的，根本不在一个数量级上。

且慢！问题还不止于此。如果我们现在提出的命题是“所有乌鸦都是白的”，它的逆否命题就是“所有不白的物体都不是乌鸦”，上面的褐色麻雀和红色地毯同样可以为其提供佐证。现在的问题是：一个同样的事实怎么可以同时作为两个截然不同的结论的例证，并提高其正确的概率呢？

第三类接触

1878年,美国得克萨斯州的农民马丁在田间劳动时,突然发现天空中有一个圆形的物体在飞行,当时美国有150家媒体竞相报导了这一事件,这是人类历史上首次见诸报端的不明飞行物(UFO)的报道。迄今为止,已有成千上万的人宣称目睹过UFO,甚至还有人直接接触了外星人的使者。

为了搞清UFO的真相,美国空军从1948年起执行了一项长达22年的"蓝皮书计划",共收集了12 600个目击报告,其中只有585个UFO报告无法用一般的物理和大气现象来解释,仅占总数的4.6%,因此美国军方认为,没有证据证明UFO是天外来客,并于1969年终止了这一研究。

英国有关部门也曾对1967—1972年间发生的1 631个飞碟事件进行了调查,发现其中705件是飞机,203件是人造天体(卫星或其他飞行器)及其碎片,170件是明亮的天体,121件是大气中的光学现象,108件是气球,余下的只有106件有待查实,占总数的6.5%。

那么,从概率上我们该如何来看待这一问题?这里要分3个问题来回答。

第一,人类不可能是宇宙中独一无二的智慧生命,地外文明存在的可能性几乎是100%。在银河系中有一两千亿颗恒星,按最保守的估计也应有40个高技术文明世界存在,一般认为应在10万个左右。

第二,宇宙空间是如此的广袤,外星人到达地球的概率微乎其微。银河系直径约为8万光年,厚为1万光年,文明世界的探访就

像大海捞针一样，即使其中有100万个文明世界，每个世界每年都有能力向外发射1万艘飞船，才可能有一艘来到地球上。

第三，生命世界是如此的多彩，外星人能接触到人类的概率几乎是0。人类在发现新大陆之前，根本不知道有袋类动物的存在；咫尺尚有天涯之感，外星文明是如此的遥远，如果他们以液态、气态的形式存在，又有什么奇怪的？

几乎所有的目击者对外星人的描述，都是在人类形象的基础上改造而成的，尽管在某些方面作了妖魔化处理，但有一个本质性的东西都被下意识地保留下来，那就是直立行走。如此多的人类烙印，其可靠性可想而知。

即使外星人与人类有相同的习性，也强迫他能适应地球的大气，那么两大文明接触的历史性时刻又会是怎样的呢？

有篇日本的科幻小说对此给了一个很好的回答：正当各国要员在机场翘首盼望外星来客的时候，客人却已经到达了机场，并被淹没在跑道上的一汪积水中——谁规定外星人一定要和我们长得一样大！

无处不在的正态分布

英国统计学家高尔顿(Francis Galton,1822—1911)曾经做过一个试验,在一木板上钉上数排圆钉,第一排是两个钉子,下面一排要比上面一排多一个钉子,且每个钉子都正对着上面两个圆钉的中央,最后一排每个钉子的下方都有一个竖直的隔板。

然后,他从顶端连续地放入一个个小球,小球穿过圆钉间的缝隙随机地向左或向右落下,不断滚入下面的一个个隔间内。最后,小球所堆成的图形几乎无一例外的是一中间高、两头低的钟形曲线,成为随机事件具有统计规律性的一个著名例子。

在生产与科学实验中,有很多随机变量的分布都可以用这样一条曲线来描述,例如某一国家成年男性的身高或体重,测量同一物体所产生的误差,炮弹着弹点到目标中心的距离,某一地区的年降雨量等。它的出现是如此的频繁,所以被称为正态分布曲线。

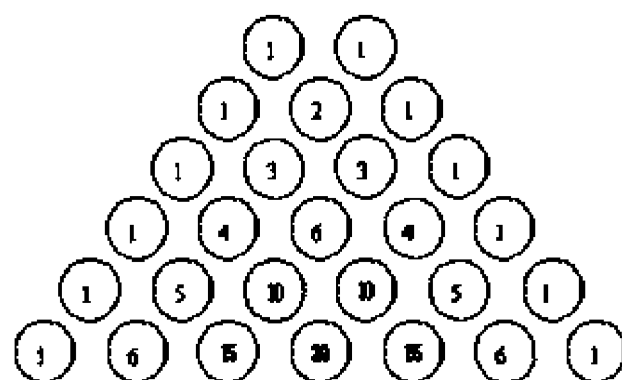
正态分布最早是由法国数学家棣莫弗(Abrahan de Moivre,1667—1754)得到的,后来又由德国数学家高斯(Carl Friedrich Gauss,1777—1855)在研究测量误差时重新导出,故又被称为“高斯分布”。现在德国10马克的纸币上,就同时印有高斯的头像和一条正态分布曲线。

本来,帕斯卡三角形是用来描述牛顿二项式展开的系数的,其第2行就是

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

的系数,第 n 行就是 $(a+b)^n$ 展开式的系数。后来,人们却发现,其每行的数值都是呈正态分布的。如果在高尔顿的试验中有 n 个间隔的话,每个间隔中所落入的小球数目就约等于帕斯卡三角

形中第 n 行数值的整数倍，这大概是这位概率论的奠基人生前所没有想到的。



抽样的艺术

在英语中，统计学(statistics)一词系由 state(国家)衍化而来，意指由国家收集的有关国情的资料，可以说它触及社会生活的每一个角落。

对于一个国家，如果要了解其居民的年龄、性别、职业、收入、受教育程度等基本情况，我们可以采取人口普查的方式，但这种普查牵扯太多的人力、物力，而且由于人口的流动而造成的重复计算与漏算，其结果也不可能是完全精确的。因此，人们希望通过调查群体中的一部分个体来了解整个群体，这就是抽样调查。

对于抽样调查，人们往往有这样一种误解，就是认为抽取的样本越多，结果就越精确，而不注意抽样的随机性。如果你跑到一家大酒店的吃客中去调查对公款吃喝的看法，恐怕你的样本越多对事实的扭曲就越厉害。

在历史上，由于在抽样时未能体现随机性原则而闹出笑话的一个著名的例子，就是美国《文学文摘》杂志对 1936 年美国总统选举结果的预测。

1936 年的美国总统候选人有两位，一位是当时的现任总统、民主党候选人罗斯福，一位是共和党候选人兰登。由于成功地将美国从历史上最为惨重的一次经济危机中拯救出来，当时大多数的新闻机构和政治观察家都认为罗斯福总统会连选连任，许多地方的民意测验结果也支持这一结论。

可是《文学文摘》杂志偏偏不信邪，认为如此少的样本不具备代表性，于是他们组织了一场美国历史上最大规模的有关选情的民意调查，拟议中的调查对象达到了创记录的 1 000 万人，约占当

时美国总人口的$\frac{1}{10}$。

尽管最后只收回了有效问卷240万份,但其结论却是明确无误的:兰登将以57%:43%的优势战胜罗斯福,而当年的选举结果是:罗斯福以62%:38%的压倒优势再次当选。

由于不堪这一沉重打击,这家杂志不久便宣告破产倒闭了。

为什么《文学文摘》付出如此大的心血,却产生如此大的偏差呢?问题就出在样本的挑选上。

为了图省事,该刊从各地的电话号码簿以及各种俱乐部的花名册上挑选了太多的访问对象,而当时美国家庭的电话总拥有量只有1 100万部,因此有条件装电话和参加各类俱乐部活动的人,大多是经济上较富裕、政治上较为保守的人,而这些人通常都是共和党的忠实选民。

如此巨大的系统偏差,最终葬送了《文学文摘》自己。

盖洛普的崛起

伴随着《文学文摘》的陨落，美国传媒界的一颗新星冉冉升起——这就是盖洛普（George Horace Gallup，1901—1984）。盖洛普1928年获新闻学博士，1935年创办了美国舆论研究所，并因成功地预测了1936年罗斯福总统竞选连任获胜而确立了盖洛普民意测验在美国的权威地位。

与《文学文摘》的大手笔不同，盖洛普调查的对象通常只有几千人，而结果却与实际情况相差无几。其成功的秘诀，就在于对时代脉搏的准确把握，严格地按照随机化原则选样，有效地控制了系统偏差。下表列出的就是盖洛普在战后几次有关总统大选结果的民意测验中所取得的骄人战绩。

年份	样本量	当选者	预测得票率	实际得票率
1952	5 385	艾森豪威尔	51%	55.4%
1956	8 144	艾森豪威尔	60%	57.8%
1960	9 015	肯尼迪	51%	50.1%
1964	6 625	约翰逊	64%	61.3%
1968	4 414	尼克松	43%	43.5%
1972	3 689	尼克松	62%	61.8%
1976	3 439	卡特	50%	51.1%

1932年，当罗斯福从共和党人胡佛手中夺得总统宝座时，正值美国1929—1933年的经济大萧条时期，由于工、农、商业萎缩，到1933年3月罗斯福正式就职时，美国完全失业工人已达1 700

万,另有102万农民破产,城市贫民高达3 400万人。

罗斯福上任后,立即推行“新政”,大力加强国家对社会经济生活的干预,大规模救济失业者和贫民,纠正美国垄断资本的一些弊端,在一定程度上缓和了社会的政治和经济矛盾,得到了社会中下层民众的广泛支持。

《文学文摘》无视这一事实的存在,使得社会下层(特别是当时多达900万的失业者)在样本中缺少其应有的代表性,其结果是可想而知的。

盖洛普的抽样方法也十分独特,它根据年龄、性别、教育程度、职业、经济收入和宗教信仰等标准,在全国各州按比例选择测验对象,然后派员上门调查或进行电话询问,以收回全部测验结果,避免产生新的系统偏差。

骗人的平均数

周先生看到一家公司在招聘职员，广告中称该公司的人均月收入达 1 200 元，高级职员可拿到 1 500 元，便欣然前往应聘。

公司经理对他的工作能力很满意，当场拍板录用周先生。可是等到月底发工资，周先生只拿到了 600 元，便去找经理理论。

周先生对经理说："你骗了我，财务主管说普通职员的工资只有 600 元，而你们在广告上却说平均工资是 1 200 元。"经理笑眯眯地回答说："坐下，坐下，不要激动嘛。这是上个月公司的人员工资表，你先看一看。"

	经　理	副经理	高级职员	秘　书	普通职员
人　数(人)	1	1	2	1	5
月收入(元)	3 000	2 000	1 500	1 000	600

"你来之前公司在册的有 10 人，大家的平均收入为

$$\frac{3\,000+2\,000+1\,500\times 2+1\,000+600\times 5}{10}=1\,200(\text{元}),$$

应该没有什么错误吧？"周先生听罢，只好自认倒霉，一走了之。

算术平均数是统计学中的一个极具迷惑性的平均指标，当样本数据较少且其中有若干个值特别大或特别小的时候尤甚。为了避免这种情况的发生，在一些需要靠评委打分来定高低的体育和艺术竞赛中，通常都采用去掉一个最高分，去掉一个最低分，然后再作算术平均的方式来解决。

在统计学中，则做得更彻底。当数据有奇数个时，我们取按大小顺序排列居中的那个数，当数据有偶数个时，就取中间两个数的

算术平均数来代替,并称之为中位数。在人口统计学中,就是采用年龄中位数来作为年龄的平均指标的。

在周先生的问题中,公司全体人员工资的中位数为

$$\frac{1\ 000 + 600}{2} = 800(\text{元}),$$

这个数值显然要比 1 200 元更接近于事实。

当然,周先生应聘时需要知道的既不是工资的算术平均数,也不是中位数,而是众数,即数据中出现次数最多的数。如果周先生事先知道这家公司人员工资的众数是 600 元,他就不会上这个当了。

会说话的数字

一位青年为抢救两名落水儿童而英勇献身,英雄的事迹传遍了四面八方,于是各种报道、评论纷至沓来,让人目不暇接。

甲报:"这时,英雄的心里只有一个念头:'救孩子要紧!'他来不及脱下身上的衣服,就纵身一跃,跳下了这条水深达8米的湍急的河流,奋不顾身地向落水儿童游去……"

乙报:"英雄倒下去了,倒在一条平均深度不足1.8米的小河里。当他筋疲力尽的时候,那些站在岸边袖手旁观的人们没有一个肯伸出援手,甚至连一个愿意去报警的人都没有。两名落水儿童得救了,可是又有谁能来救救这些麻木的灵魂……"

看了这些报道,你恐怕不敢相信他们说的是同一件事。为了加强文章的感染力和说服力,两位作者都采取了让数字说话的方法,只可惜8米指的是水的最深处,1.8米指的是平均水深,与英雄牺牲的地方看不出有什么关系。数字本身没有错,出错的是人。

1990年,一批在读研究生深入到安徽农村作了一次关于农村联产承包责任制的调查研究,回校后开了一个大型报告会。有趣的是,有两位研究生从同一件事出发,却得出了完全相反的结论。

甲:"这个村子里有一位种粮大户,早几年赚了不少钱,可是他没有忘记乡亲们,一遇到谁家有困难,他都鼎力相助。去年,他家失了火,东西差不多都烧光了,乡亲们闻讯后纷纷捐款,几十户人家在短短几天内就捐出了1 500元,这充分说明了农村实行联产承包责任制以后,农民之间的关系不但没有变得淡漠,而是更加水乳交融,联产承包责任制必将为中国农村带来光明灿烂的未来!"

乙:"这位种粮大户为村里作了不少贡献,可是在他收到的

1 500 元捐款中，有 1 200 元是村长和支书出的，只有剩下的 300 元才是由乡亲们共同捐助的。一家一户各自为政的承包形式已经使得农村的人情关系变得日趋淡漠，因此，随着中国农村生产力水平的日益提高，中国农民必将重新走上集体化的道路！"

在这里，我们无意对两者之间的是非曲直作一判断，但需要指出的是，一些立论者为了给自己的论点提供有力的证据，对数字的使用是经过精心取舍的。如果你在对事情的大背景一无所知的情况下，就让别人的数字牵着鼻子走，你就要犯大错误。

平均人

在概率统计中，由于均值（或数学期望）是描述一个群体的特性的最常用的数值，所以比利时统计学家、数理统计的创始人奎特莱特（Lambert Adolphe Jacques Quetlet，1796—1874）于 1835 年提出了所谓"平均人"（average man）的概念。作为一个虚拟的人，他的一切指标，包括身体的、经济的、文化的各方面，都具有该群体的平均值。

由于平均人给了群体一个形象的表达，因此如果要比较两个不同群体的人，只要直接比较其平均人就可以了。

下表就是 1995 年测定的全国和江苏省 15～18 岁各年龄段城乡男女学生的平均人资料。从表中可以看出，江苏省 18 岁的城市男生的身高为 171.25 米，体重为 60.31 千克，明显高于全国的平均水平，从中我们可以了解各群体间体形的差异。

类　别	年龄	身　高（米）		体　重（千克）	
		全国	江苏	全国	江苏
城市男生	15	167.56	169.98	54.11	56.09
	16	169.48	171.20	56.80	58.83
	17	170.27	171.54	58.25	59.50
	18	170.33	171.25	58.70	60.31

续表

类　别	年龄	身　高(米)		体　重(千克)	
		全国	江苏	全国	江苏
城市女生	15	158.27	159.54	48.70	50.78
	16	158.70	160.12	49.97	51.56
	17	158.89	159.60	50.37	51.55
	18	158.64	160.26	50.56	51.00
乡村男生	15	163.73	165.50	50.29	51.80
	16	166.42	166.82	53.58	54.17
	17	167.60	169.02	55.40	56.71
	18	168.29	169.07	56.71	56.61
乡村女生	15	155.68	156.48	47.18	46.78
	16	156.50	157.40	49.06	49.79
	17	156.79	158.06	49.96	50.79
	18	157.11	157.90	50.44	51.62

你过得还好吗

如果你已经是一位成家立业、担负起生活重任的人，你也许很想知道，在你所处的大环境中，你的生活质量与别人有什么不同。这时，你只需要和你所在群体的平均水平作一比较，就可以有一个形象的结论。

假设现在是2000年，而你是一位生活在南京的城市居民，那么你家一共有2.92人，你每月在单位的全部收入为879.24元，你一个人要负担1.8人的生活费用(包括老人、孩子和你自己)。你家每月的人均可支配收入为686.04元，每月的消费性支出为587.29元，其中42.4%用于食品消费，12.9%用于文教娱乐用品及服务，11.3%用于家庭设备、用品及服务，9.6%用于居住，8.8%用于衣着支出，5.1%用于交通和通讯，4.9%用于医疗保健。

你全家的居住面积为29.5平方米，虽然和农民兄弟的119.5平方米相比少了点，但你还是愿意呆在城里。你家每月要交房租18.6元，水费10.8元，电费54.5元，每年用于旅游的支出为460.1元。你家每人每月购买粮食6.6千克，肉及其制品2.1千克，家禽及其制品1.3千克，蛋1.2千克，蔬菜10.2千克，牛奶1.9千克，捎带抽了2包烟，喝了500克酒。

作为一个平均人，你家的耐用消费品拥有量有整有零，通过下表就可以看出你家的生活水平大体在一个什么位置了。

指标	拥有量	指标	拥有量
自行车	2.00辆	中高档乐器	0.08件
电风扇	1.98台	摩托车	0.05辆

续表

指标	拥有量	指标	拥有量
彩色电视机	1.41 台	呢大衣	2.19 件
电冰箱	0.99 台	毛毯	1.47 条
洗衣机	0.98 台	沙发	1.11 个
空调器	0.80 台	写字台	0.95 个
照相机	0.59 架	大衣柜	0.91 个
录音机	0.43 台	毛皮大衣	0.51 件
录像机	0.35 台	沙发床	0.39 个
高级音响	0.25 台	组合家具	0.36 套

生子当如孙仲谋

天下父母没有一个不希望自己的孩子成为人中之龙的，就连一代豪杰曹操也有"生子当如孙仲谋(孙权)"的感叹，于是如何挑选一个合适的日子来生孩子，便成了一些统计学家感兴趣的问题。

其实，要做到这一点并不难，只需要作一个简单的抽样工作就行了。下面就是一张20世纪一百余位中国政治、文化名人的出生月份表(按生年排序)，看看我们能从中得到些什么"启示"。

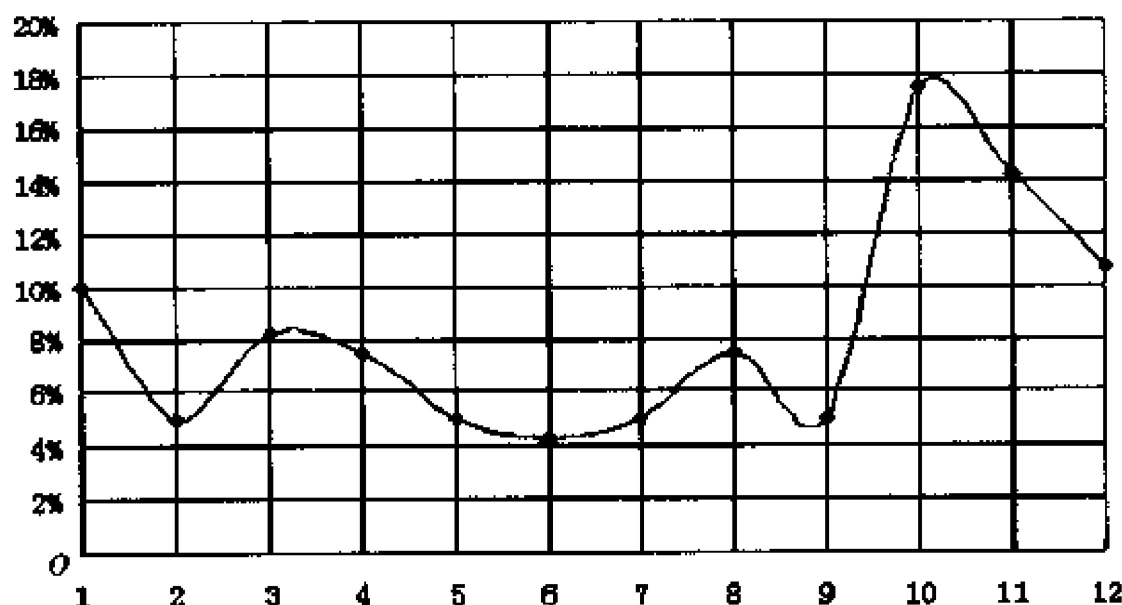
月 份	各月出生的名人
1	严 复、黄宾虹、蔡元培、章太炎、沈钧儒、宋庆龄、茅以升、徐志摩、瞿秋白、陶 铸、吴阶平、丁肇中
2	李仪祉、老 舍、张钰哲、陈 赓、杨靖宇、聂 耳
3	董必武、林伯渠、竺可桢、贺 龙、刘海粟、潘天寿、周恩来、田 汉、蒋经国、艾 青
4	詹天佑、张 澜、廖仲恺、宋教仁、吴有训、叶剑英、梁思成、任弼时、贝聿铭
5	张大千、李富春、童第周、罗瑞卿、杨尚昆、吴健雄
6	马寅初、张学良、冼星海、陈 云、李先念
7	何香凝、陈寅恪、徐悲鸿、茅 盾、汤飞凡、李嘉诚
8	侯德榜、李宗仁、方志敏、张闻天、陈 毅、周培源、邓小平、粟 裕、江泽民
9	鲁 迅、叶 挺、廖承志、曹 禺、杨振宁、袁隆平

续表

月　份	各月出生的名人
10	陈嘉庚、黄　兴、黄炎培、陈独秀、李叔同、蒋介石、李大钊、李四光、陶行知、熊庆来、叶圣陶、梅兰芳、彭德怀、冰　心、夏　衍、黄克诚、刘志丹、傅抱石、钱三强、朱镕基
11	齐白石、孙中山、冯玉祥、李济深、丁　颖、郭沫若、杨虎城、邹韬奋、刘少奇、朱自清、李立三、徐向前、罗荣桓、巴　金、华罗庚、胡耀邦、李政道
12	王国维、蔡　锷、朱　德、胡　适、刘伯承、毛泽东、宋子文、张孝骞、聂荣臻、严济慈、林巧稚、林　彪、钱学森

名人可以预订吗

从上面的月份表中可以看出,各月出生的名人数呈现出明显的波浪式运动,在每年的10月份到11月份达到一个顶峰,而在每年的6月份到达一个谷底。若将绝对人数转换成占全年的百分比,其波形图如下。



十月怀胎,一朝分娩。因此,专家会以不容置疑的口吻告诉你,在岁末年初受孕,是你的最佳选择。

如果事实果真如此的话,那么生个名人岂不太容易了!

凭直觉,你可能会说,这大概是因为样本取得太少的缘故,只要抽取的人数增多,各个月出生的名人数就会趋于均匀。假如你有兴趣的话,不妨抽取1 000个人来试一试,你会发现结果不会与上面有太大差异。

那么,问题究竟出在哪里呢?

实际上,问题就在于,人们常常以为普通人出生月份的分布曲

线是一条近乎水平的直线,而事实却恰恰相反。如果你选择 120 个凡人重复上面的工作,你就会发现他们出生月份的分布也呈现出类似的波动,而不是人们想像的那样每个月的机会是均等的。

这种波动体现了中国人的婚育习惯,10 月份和 11 月份出生的名人多,是因为这两个月出生的人数多,它只不过反映了大多数中国人都选择在岁末年初的农闲时期结婚、受孕这一事实罢了。

时至今日,也很少有人选择在夏季结婚、受孕,反映在图表上就是来年的 5 到 7 月份出生的婴儿数明显减少,当然名人也就不会多了。

谁更聪明

通过大脑容量的大小来判定一个人智商的高低,已不是什么新鲜话题,据说列宁和爱因斯坦都有异于常人的大脑。为了另辟蹊径,有人想到了脚。

于是他们在一所小学中测量了大量学生的脚长以及他们的智商,结果明确无误地支持这样一个结论:脚大的孩子比脚小的孩子智商高。

为了让数据更有说服力,一份像样的分析报告也随之出笼,其中列举了造成这一现象的各种原因,例如脚的大小是和人的运动能力有关系的,运动不但能增强人的体质,也能提高人的心智,等等。

现在的问题是,调查者回避了这样一个重要事实:他的调查对象涵盖了从一年级到六年级的各年龄段的学生,而不是仅局限在一个年龄段内。

脚的大小实际上反映了被调查者年龄的大小,年龄大的小孩当然要比年龄小的小孩脚大些,接受的教育也更多一些,智商自然要比年龄小的孩子高一些,仅此而已。

还有一项调查表明,杰出的数学家大多是长子。这是否意味着头生子要比次子更聪明呢?回答也是否定的。因为它只反映出一个简单的事实:大多数的儿子都是长子。

在只有 1 个孩子的家庭里,这个孩子显然是长子。

在有 2 个孩子的家庭中,因为这个家庭中必有 1 个儿子(被调查者自身),所以孩子的组合只有下列 4 种等可能的情形:(1)姐姐,自身;(2)自身,妹妹;(3)自身,弟弟;(4)哥哥,自身。在前 3 种

情形，被调查者都是长子，所以他为长子的概率为0.75。

在有3个孩子的家庭中，则有12种等可能的情形：(1)大姐，二姐，自身；(2)姐姐，自身，妹妹；(3)自身，大妹，小妹；(4)姐姐，自身，弟弟；(5)大姐，二哥，自身；(6)自身，妹妹，小弟；(7)大哥，二姐，自身；(8)自身，弟弟，小妹；(9)哥哥，自身，妹妹；(10)自身，大弟，小弟；(11)哥哥，自身，弟弟；(12)大哥，二哥，自身。其中有7种都是被调查者为长子，所以这一概率为$\frac{7}{12}$，仍大于$\frac{1}{2}$。

我们不否认某些杰出人物的成功含有某种先天因素在里面，但更重要的是人的后天努力。为人父母的，与其相信这些似是而非的成才捷径，倒不如让孩子扎扎实实地走好生活的每一步，这才是最明智的选择。

两性的差异

至于男女两性谁更聪明的问题，有人根据历史上无数的成功者中男性远远多于女性的事实，来说明男性的智力水平要比女性高，并把这一切归结为遗传因素。那么，有没有科学的依据来支持这一观点呢？

迄今为止的研究表明，在智力上男女没有多大差别。1939年，苏格兰教育研究委员会进行了一次大规模的智力测验，被试者都是生活在苏格兰郊区的13岁左右的学龄儿童。测验结果显示，男孩的平均智商为100.5，女孩为99.7，两者仅相差0.8，并不存在谁优谁劣的问题。

实际上，环境因素才是造成两性差异的决定性原因。男孩穿裤子、女孩穿裙子，男孩舞刀弄枪、女孩玩布娃娃，这些曾经被认为是天经地义的事，而这本质上都是父母按照子女的性别定型为孩子界定的性别角色，完全是由后天因素造成的。女性在顺从性、依赖性、同情心上大于男性，在事业心上小于男性，也与妇女在社会上处于不利的传统地位有关。

为了探求两性间的内在差异，美国心理学家麦科比和杰克林在1974年发表的《性别差异的心理学》一书中，通过对在过去8年间进行的有关两性心理差异的1 600多项研究成果的分析比较，归纳出两性在4个方面存在的差异：

(1)在语言能力上，女孩优于男孩。在学龄早期，两性的言语能力相近，但从11岁开始出现分化，女孩言语能力的发展快于男孩；

(2)在空间知觉能力上，男孩优于女孩。男性在此能力上的优

势从 13 岁左右开始增长，这在青年期和成年期均十分明显；

(3)在数学能力上，男孩优于女孩。在小学代数能力的掌握上，男孩和女孩不存在差异，但从 12 岁开始，男孩数学能力的增长明显超过女孩；

(4)男孩比女孩表现出更大的身体侵犯性和言语侵犯性。这是两性间在社会行为上最明显的差异，既与生物因素有关，又与社会化因素有关。

此外，麦科比和杰克林还认为，两性仅在下列 6 个方面或许存在着性别差异，但还不足以判明：

(1)女性的触觉更敏感；

(2)男性更主动；

(3)女性更愿意说出害怕、焦虑等感受；

(4)男性更富于竞争性；

(5)男性更喜欢处于支配地位；

(6)女性更倾向于顺从。

形形色色的结论

从上面的例子可以看出，通过统计分析常常会发现某些事物之间有关联，但这种关联未必蕴涵着某种因果关系。当甲、乙两个事物有关联时，可能甲为乙之因，也可能乙为甲之因，也可能它们之间什么关系都没有，两者都是某一未知因素的果。如果不明了这一点，不对统计规律做出正确的评估，常常会导致一些轻率的结论。

下面就是这方面的一些例子。

统计资料表明，大多数汽车事故发生在中速行驶中，而很少有事故发生在每小时大于150千米的行驶速度上。这是否就意味着高速行驶更为安全？

不！因为大多数的人都以中等速度开车，所以大多数的事故都发生在中速行驶中。

俗话说："打死会拳的，淹死会水的。"这是否表明人一无所长反而更安全？

不！因为敢出手的大多是会拳的，敢下水的大多是会水的，明哲保身的人很少有机会打架，一辈子不下水的人肯定不会被淹死。

有一个国家发现，本国喝牛奶的人数和死于癌症的人数在同比例增加。这是否说明喝牛奶会引发癌症？

不！这只表明了这个国家正在步入老龄化社会，老年人通常都喜欢喝牛奶，而癌症也大多发生在老年阶段。

有些重症病人更愿意相信一些小医院，因为他所认识的几个进了大医院的病友最后都病死了。这是否证实了偏方能治大病？

不！由于许多绝症患者最终都被家人送进了大医院，所以大

医院里的死亡率肯定要比小医院高得多。

美国南部的亚利桑那州地处亚热带，全年日照充足，气候宜人，但在该州死于肺结核的人数要比其他州高。这是否意味着这样的气候更容易生病？

不！正因为这里适宜于肺病患者休养调理，许多病人纷纷从全国各地迁徙于此，所以该州肺病患者的比例要高于其他州，死亡人数也就同步增加。

从上面这些似是而非的结论可以看出，如果我们不能对各种统计结论做出正确的评估，对其中所显示出的统计关联给予恰如其分的解释，就很难避免出现统计误解的结局。而现代的许多商业广告，正是以这种统计误解为基础的。

如果我是一个广告商，为了暗扣"麒麟送子"的说法，我会为"麒麟牌"床具向公众提供这样一个统计数据：随着"麒麟牌"床具在本市的热销，今年男孩子的出生数比去年明显增加。你听了以后是否也准备买一床？（实际上，这两者都是结婚人数增加的结果。）

运动与健康

没有什么事情会像健康知识那样让人们感到困惑的了。今天有人会告诉你说，喝隔夜茶会致癌，明天又有人会告诉你，茶叶有预防多种恶性肿瘤的作用，让你感到无所适从。尽管它们各自都有自己的数据支持，但为什么会得到如此截然不同的结论呢？

撇开故弄玄虚、哗众取宠的因素以外，是因为在与人体有关的问题中，由于个体的差异太大，将由规模不大的局部数据所得的分析结论推广到普遍情况，往往要出问题。例如，有人从西方女人生完孩子不久就能满地跑的事实，来说明中国人“坐月子”是完全没有必要的。这就是忽略了中国人与西方人在身体素质、饮食习惯上的差异，将特殊推广到了一般的结果。

那么，究竟有没有一个对大部分健康人群都适用的维持健康与长寿的方法呢？目前争议最少的大概就是运动了。早在1983年，美国就有人对25个州100余万中老年人的日常运动的情况与年死亡率进行了一次大规模的调查，下表列出了各年龄组和运动组的死亡率的调查结果。

运动组 / 年龄组	完全不运动组	少量运动组	中等运动组	经常运动组
45～49岁	1.06%	0.56%	0.38%	0.23%
50～54岁	2.08%	0.80%	0.55%	0.33%
55～59岁	3.60%	1.58%	0.85%	0.59%
60～64岁	4.90%	2.32%	1.19%	0.92%

续表

年龄组 \ 运动组	完全不运动组	少量运动组	中等运动组	经常运动组
65～69岁	10.33%	3.85%	1.74%	1.38%
70～74岁	11.02%	4.92%	2.60%	1.56%
75～79岁	16.05%	6.55%	3.46%	1.96%
80～84岁	16.43%	8.49%	3.96%	2.49%
85岁以上	22.13%	12.08%	5.67%	2.78%

从上表可以看出，各年龄组的死亡率都随着每周运动程度的增加而减少，运动可以有效地延缓肌体的衰老。需要指出的是，这里经常运动组中的"经常运动"的含义是指每周参加3～5次运动，每次半小时，而不是指每天都参加各种剧烈的身体运动，它与中国古代"动诸关节，以求难老"、"动静不失其时"的养生思想是吻合的。

吸烟的是是非非

关于“吸烟有害健康”这一结论，是经过近半个世纪的争论才得到各国政府和社会公众认可的，这里面统计分析起了很大的作用。但即使像“吸烟会导致肺癌”这种被医学界广泛接受的因果联系，其得来也是一波三折的，至今还有一些现象没有得到合理的解释。

肺癌的起因复杂，现在一般认为吸入致癌物(特别是吸烟)、免疫抑制和慢性肺疾患是发病的重要因素，90%的肺癌都与吸烟有关。

早在20世纪50年代，美国、加拿大、英国和日本都进行了回顾性调查，证明吸烟男性肺癌的死亡率为不吸烟男性的8～20倍，其中比较有代表性的，是英国学者多尔和希尔在此期间所作的研究工作。

多尔和希尔从伦敦的20家医院中收集了709位肺癌患者的吸烟资料，然后再与另外709位健康者的情况加以比对，结果发现吸烟与患肺癌呈明显的正相关，而纸烟的危害性又大于烟斗。据此，《英国医学杂志》于1957年发表社论，肯定了吸烟对健康的危害作用，并号召公众对此予以足够的重视。

然而，这一结论在当时就遭到了英国著名统计学家、遗传学家、20世纪现代统计学的奠基人费歇尔(Ronald Aylmer Fisher，1890—1962)的质疑，并在《英国医学杂志》上引发了一场论战。

费歇尔从多尔与希尔的数据中发现了一件出人意料的事：在吸烟者中，把烟吸进肺里的人，其患肺癌的危险性，明显地低于那些不把烟吸入肺里的人。如果烟真的对肺有损害，那么将烟吸入

肺中的危险性理应更大一些，因此，费歇尔认为，吸烟与患肺癌是否有因果关系令人感到怀疑。

为了解释吸烟与患肺癌呈正相关这一事实，费歇尔认为两者可能受到同一基因的影响，即某些人有这样一种基因，它使得这些人：

(1)天生地爱抽烟；

(2)天生地易得肺癌。

所以吸烟与患肺癌都是天性使然，人们不必为此而忙于戒烟。

尽管费歇尔在生前未能找到足够的证据支持自己的结论，但现代科学已经证实，许多化学致癌物需经体内代谢，其产物才有致癌作用。机体内芳香烃羟化酶（AHH)的含量与吸烟者易患肺癌呈正相关，而AHH的诱导由一个遗传基因所控制。

但是，就像易燃物离开了空气就不会燃烧一样，基因也要通过致癌物来起作用，因此，控制吸烟仍然是预防肺癌的一个重要手段。

马尔萨斯的谬误

如果说一些人对一些统计结论的解释对读者的误导还是在有意无意之间发生的话，那么英国经济学家、人口学家马尔萨斯(Thomas Robert Malthus，1766—1834)的做法就是比较恶劣的了。

在马尔萨斯生活的年代，由英国产业革命所引起的工人失业和贫困现象日益严重，主张确立社会正义、进行社会经济改革的葛德文等人的理论在群众中广为流传。

为了把资本主义制度造成的一切灾难都归结于自然规律的作用以抵消葛德文等人的思想的影响，马尔萨斯于1798年发表了他的第一部人口学著作《论影响于社会改良前途的人口原理，并论葛德文、孔多塞和其他作家的推测》，后来被简称为《人口原理》第一版。

马尔萨斯在该书中断言，人口在无阻碍时，按1，2，4，8，16，32，64，128，256，…的几何级数增长，而生活资料即使在最有利的生产条件下，也只能以1，2，3，4，5，6，7，8，9，…的算术级数增长，人口增殖力比土地生产人类生活资料的能力更为强大，并认为这是“永恒的人口自然规律”。

从这一原理出发，马尔萨斯得出了下面几条结论：

(1)贫穷和罪恶是人口规律作用的结果，而不是社会政治经济制度造成的，任何社会改革都不可能消除人口法则的压力。

(2)私有制使人们担负起养育子女的责任，废除私有制度不但不会消除贫穷和罪恶，反而会刺激人口增长，带来更大的贫困和痛苦。

(3)工人的工资受人口规律的支配，人口增加工资就下降，反

之就上升。

(4)社会救济使无力维持家庭的人结婚生子,实际上是供养贫民再养贫民,导致恶性循环。

马尔萨斯人口论的反民主性质是明显的,所以他的《人口原理》第一版是匿名发表的,直到1803年第二版出版时才以真名示人。他的理论理所当然地受到了马克思主义者和社会正义力量的严厉批评,但长期以来人们都忽略了一个重要事实,那就是马尔萨斯赖以立论的基础是错误的。

实际上,他所用来证明人口按几何级数增长、生活资料按算术级数增长的统计数字来自两个不同的总体,两者完全没有可比性:他的生活资料增长数据来源于英国,人口增长数据却来源于澳大利亚,而当时正是英国殖民者大量向澳大利亚移民的时候!

尴尬的试验

有两位年轻的医生宣布研制出了一种新药，由于缺乏必要的对比试验，遭到了专家的质疑。于是两人开始补做这一工作。

第一位医生选择了18位病人分成两组做试验(结果见下表)，尽管病情好转者的人数都不过半数，但服用新药者的好转率要大于服用安慰剂者，因此第一位医生认为新药好歹要比安慰剂强。

	受试组(服用新药)	对照组(服用安慰剂)
每组人数	11	7
病情好转的人数	5	3
好转率	$\frac{5}{11}$	$\frac{3}{7}$

第二位医生也选择了23位病人分成两组做试验，这回病情好转者的人数都过了半数，且服用药物者的好转率要大于服用安慰剂者，因此第二位医生也认为试验结果表明药物要比安慰剂更有效。

	受试组(服用药物)	对照组(服用安慰剂)
每组人数	9	14
病情好转的人数	6	9
好转率	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{14}$

两份报告都被送到了专家的手里，专家看了看对他们说："如果我告诉你们这样微弱的优势不足以说明任何问题的话，你们会不服气。现在我们就假定你们的做法是对的，下面我就来证明安慰剂比你们的新药更有效。"

专家简单地将两位医生的41位病人的资料合在了一起，这时试验的结果就变成了下面的样子。

	受试组(服用药物)	对照组(服用安慰剂)
总　人　数	20	21
病情好转的人数	11	12
好　转　率	$\frac{11}{20}$	$\frac{4}{7}$

不管你信不信，此时服用新药者的好转率却变成了小于服用安慰剂者。这个例子说明，许多统计试验的基础是如此的脆弱，以至于稍作调整就不能自圆其说，所以睁大你的眼睛是多么的重要！

安慰剂效应

1958年,一位美国医生提出了一种通过冷冻手段治疗胃溃疡的新方法,在当时颇为流行。

该疗法先将患者麻醉,再将一个小容器置入患者的胃内,泵入冷冻剂,使胃冷冻一段时间,其目的是让胃完全停止工作,以便溃疡得以康复。使用该法后,有许多患者的病情得以缓解,但仍有一些医生对此持怀疑态度,认为其中不能排除有心理因素在起作用,一时纷争四起。

1963年,有人为此设计了一次经过周密策划的试验,以对这种方法的疗效进行评估。

该试验共涉及160名胃溃疡患者,并把他们分为A、B两组,A组82人,B组78人。对A组病人,全部实施了上述疗法,使胃处于冷冻状态;对B组病人,其操作在表面上与A组无异,但在容器中设计了一个回路使冷冻剂返回,让胃处于正常状态,而患者本身则对此一无所知。

在随后的两年中,组织者让一批未介入第一阶段工作的医生监察这160位患者的情况,并告知这些医生,全部患者都已接受了冷冻疗法。结果,在最初的6个星期中,两组各有29%的人表示症状消失,在A组中47%的人表示病情有所缓解,在B组中也有39%的人作同一表示。

随着时间的推移,两组中的许多病人都有复发和感觉情况变差的现象出现,A组为45%,B组为39%,且在两年中的任何一段时间内,都没有发现两组患者的治愈率有显著差异。事实令人信服地证明了冷冻方法对治疗胃溃疡无效,其初期所显现出来的

效果，完全出于患者的心理作用。

医学试验中的这种安慰剂效应，在实践中是屡见不鲜的。有人就曾经做过这样的试验，当头痛发作时给患者胡乱吃点安慰剂，结果竟有$\frac{1}{3}$的人表示头痛有所缓解。

实际上，大多数病人对医生都是有依赖心理的，医生对药效说得越肯定，病人服后的心理感觉就会越良好，这就解释了为什么香灰、符水之类的东西，也会对一些笃信神佛的人起到减轻病症的作用了。

为了避免人为因素对试验结果的干扰，要通过临床试验鉴定某种药物的疗效，除了应设立服用安慰剂的对照组外，还应遵循所谓"双盲"的原则，即让受试者(患者)与试验者(医生)都处在盲目的状态，除了试验的组织者外，医生和患者均不清楚谁服用的是药，谁服用的是安慰剂。

假设检验

对于一项统计假设，我们可以通过假设检验的办法来判断它的真伪。费歇尔曾经用一个奶茶试验来说明这一思想。

一杯由牛奶(milk)和茶(tea)混合而成的奶茶，调制时可以先倒奶后倒茶(MT)，也可以先倒茶后倒奶(TM)，有位女士声称她能分辨这两者，于是费歇尔设计了一个试验来检验这一说法。

费歇尔准备了8杯奶茶，其中MT、TM各4杯，让这位女士通过品尝来找出哪4杯是TM，以检验下列假设的正确性：

H_0：该女士无辨别TM与MT的能力。

为了防止该女士是靠瞎蒙来使我们相信她有这一能力的，我们事先设定一个阀值，例如0.05，只有当她蒙对的概率小于0.05时，我们才拒绝 H_0，承认她有分辨两者的能力，否则维持原判，对她的说法不予理睬。

结果，她4杯都说对了。如果她是瞎蒙的(即 H_0 成立)，则"从8杯奶茶中随意拿出4杯，刚好全都是TM"这一事件发生的概率为

$$\frac{1}{C_8^4} = \frac{1}{70} < 0.05,$$

因此我们有理由相信这一结果不是靠撞大运得来的，从而拒绝 H_0。

在检验一个假设 H_0 时，我们可能犯两类错误：第一类错误是真实情况为 H_0 时，却判断 H_0 不成立，犯了"以真为假"的错误；第二类错误是 H_0 实际不成立时，却判断它成立，犯了"以假为真"的错误。

通常我们不希望轻易拒绝 H_0，例如在上述问题中我们不轻易相信该女士的说法，所以我们设定一个阈值（称为检验水平），仅当我们犯第一类错误的概率不超过该值时，才拒绝 H_0。

可是让统计学家为难的是，如果你刻意地缩小犯第一类错误（即"弃真"）的概率时，你犯第二类错误（即"取伪"）的概率就会增大，这就像在司法实践中，如果你过分地强调"不放过一个坏人"（即不"以真为假"）的话，就难免会冤枉一批好人（即"以假为真"）。

在上述奶茶试验中，如果我们要求把她蒙对的概率控制在0.01以内时，那我们就只有接受 H_0 了，因为

$$\frac{1}{70} > 0.01。$$

对于这种无奈，我们是无法解决的，这就像考试总要定一个及格线，为什么 60 分及格，59 分就不及格，那只有天知道了。

矮个子长寿吗

俗话说："天塌下来有高个子顶着。"所以有一派学说认为，由于他们乐天知足的天性，矮个子通常要比高个子长寿。为了验证这一说法，我们来看一看31位自然死亡的美国总统的寿命(岁)与他们的身高(厘米)之间的关系。

总统	身高	寿命	总统	身高	寿命
Madison	163	85	Eisenhower	178	78
VanBuren	168	79	Cleveland	180	71
B. Harrison	168	67	Wilson	180	67
J. Adams	170	90	Hoover	183	90
J. Q. Adams	170	80	Monroe	183	73
W. Harrison	173	68	Tyler	183	71
Polk	173	53	Buchanan	183	77
Tayler	173	65	Taft	183	72
Grant	174	63	Harding	183	57
Hayes	174	70	Jackson	185	78
Truman	175	88	Washington	188	67
Fillmore	175	74	Arthur	188	56
Pierce	178	64	F. Roosevelt	188	63
A. Johnson	178	66	L. Johnson	188	64
T. Roosevelt	178	60	Jefferson	189	83
Coolidge	178	60			

若我们以171厘米为个子高、矮的分界线，来讨论高、矮两部分人的平均寿命相同这一假设的正确性，则在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，我们可以得到矮个子的平均寿命要高于高个子的结论，可是如果我们以173.35厘米（即下文中高尔顿所用男女平均身高）为分界线，则在同样水平下我们又可以得到他们的平均寿命相同的结论！

面对统计方法的这种局限性，难怪有人要说："统计学家是这样一群人，他们可以用数据证明他们想要证明的任何事情。"此话虽有失偏颇，但它确实提醒我们，不要轻易相信任何一个统计结论。

子代身高与父代的关系

从遗传学的角度来看,高个子的父母所生的子女一般个子也高,矮个子的父母所生的子女一般也偏矮。而在现实生活中,高个子的女性更愿意找高个子的男性,矮个子的男性又只愿意找矮个子的女性,照此下去,一代一代人的身高应呈两极分化的状态,即高的高、矮的矮,处于中间状态的人会越来越少。

但实际情况又如何呢?各代人的身高分布始终呈两头小、中间大的正态分布,这又是为什么呢?

英国遗传学家、优生学的创始人高尔顿对此进行了研究,得出的结论是:子代的身高有向中心(各代人的平均身高)回归的趋势。

高尔顿收集了205对夫妇与他们的928位成年子女的身高资料,发现父代与子代的平均身高为173.35厘米,超过这个数字的就是高个子,不到这个数字的就是矮个子。若以x记父母二人的平均身高,y记其子女的平均身高,则高尔顿建立了一个父母平均身高与子女平均身高之间的关系式:

$$y = 173.35 + 0.8(x - 173.35)。$$

若设父亲的身高为176.0厘米,母亲的身高为165.5厘米,则父母的平均身高为170.25厘米,比总平均低了3.1厘米;再由上述公式,其子女的平均身高为

$$y = 173.35 + 0.8 \times (-3.1) = 170.87(厘米),$$

虽然仍属矮个子之列,但与总平均的差距只有2.48厘米(只有其父代差距的80%),显示出向中心(173.35厘米)回归的趋势,较好地解释了一代一代人的身高的分布基本保持稳定的原因。

作为在遗传学研究中导人数学方法的第一人,高尔顿的工作

具有划时代的意义，故后人把这种反映变量之间的关系的方程称为“回归方程”，把这种通过数据建立方程的统计方法称为“回归分析”，尽管在绝大部分问题中，已不再有任何“向中心回归”的意思。

至于成年人的身高（记作 x，单位：厘米）与体重（记作 y，单位：千克）的关系，若以 25 岁的男性为标准，则目前最常用的回归方程是

$$y = x - 105,$$

对于女性则为

$$y = x - 110,$$

并随着年龄的增加，每年可增加 0.5 千克体重（直到 40 岁），并以此数值的 ±10% 为标准误差范围。

相关分析

高尔顿的另一个重要贡献，就是在开创了回归分析的同时，提出了"相关系数"的概念，以衡量两个变量之间的关联紧密程度，并经后人的发扬光大，发展成为一整套被称为"相关分析"的统计方法。

对于香烟，我们知道其烟气中最危险的物质除了一氧化碳外，就是焦油和尼古丁。焦油有致癌作用，内含150～500种多环芳烃，已被证实的致癌物质约有20多种；而尼古丁则是使人成瘾的剧毒物质，量小时可使中枢神经系统兴奋，量大时则起抑制作用。作为香烟中的两大杀手，为什么我们在香烟盒上可以看到"焦油含量：中"的字样，却看不到有关尼古丁的陈述呢？

实际上，用相关分析的观点，香烟中焦油的含量与尼古丁的含量是有关联的，只要知道其中一种的含量就可以大体知道另一种的多寡了。

下面就是美国联邦贸易委员会(FTC)对美国市场上的10种香烟品牌的一次调查结果，表中列出了各品牌中焦油与尼古丁的含量，以及按含量由低到高的排名次序。

品名	焦油含量		尼古丁含量	
	含量	排名	含量	排名
Viceroy	14	2	0.9	2
Marlboro	17	4.5	1.1	4
Chesterfield	28	9	1.6	9

续表

品名	焦油含量		尼古丁含量	
	含量	排名	含量	排名
Kool	17	4.5	1.3	6
Kent	16	3	1.0	3
Raleigh	13	1	0.8	1
Old Gold	24	7	1.5	8
Philip Morris	25	8	1.4	7
Oasis	18	6	1.2	5
Players	31	10	2.0	10

其中 Marlboro 因与 Kool 的焦油含量并列第 4 而平分了第 4、第 5 的座次。从表中可以看出，各品牌在焦油与尼古丁含量的排名基本上是一致的，反映出两者有很好的关联度，使得它们之间的斯皮尔曼等级相关系数达到了 0.966 7。

著作权之争

《静静的顿河》是苏联文学史上的杰作，其作者肖洛霍夫也因此而获得了1965年的诺贝尔文学奖。然而，对于这部反映十月革命前后顿河哥萨克地区新旧冲突的史诗般作品，有人却认为其真正作者是1920年死于斑疹伤寒的哥萨克地方民族主义者克鲁乌科夫。

为此，在20世纪30年代苏联将《静静的顿河》搬上银幕时，还发生了克鲁乌科夫的遗孀冲击片场的事件，一时闹得沸沸扬扬。

关于肖洛霍夫是如何得到克鲁乌科夫的手稿的，还有一段离奇的传说。

1924年，肖洛霍夫娶了克鲁乌科夫的一位挚友的女儿，在她的嫁妆里发现了一只军用手提箱，其中有这位已故作家的一部未出版的作品手稿。肖洛霍夫看完这部四卷本的巨著后如获至宝，立即改写了前两卷的5%，后两卷的30%，将原书改头换面后以自己的名义发表。

挪威奥斯陆大学的苏联文学教授盖尔·克其萨为了弄清这一历史悬案，利用计算机对肖洛霍夫与克鲁乌科夫的作品进行了统计分析。作为对照，他把收集到的样本分为三组，第一组为肖洛霍夫的没有争议的作品，第二组为《静静的顿河》本身，第三组为克鲁乌科夫的没有争议的作品。

由于不同的作家有不同的创作风格，反映到作品中就呈现出不同的语言风格，他就和他的同事们研究了三个语言参数。

第一个参数是作品中不同词汇总量与总词汇量的百分比，统计结果表明，第一组为66%，第二组为65%，第三组为59%，最后

一个数据明显低于前两个数据。

第二个参数是俄文中最常见的20个词汇的分布频谱，统计结果表明，第一组略小于23%，第二组略大于23%，第三组为26%，最后一个数据明显高于前两个数据。

第三个参数是作品中只出现过一次的词汇所占的百分比，统计结果表明，第一组为81%，第二组为82%，第三组为77%，最后一个数据又明显低于前两个数据。

显然，《静静的顿河》与克鲁乌科夫的其他作品具有完全不同的语言风格，而与肖洛霍夫的作品具有更大的相似性。即使《静静的顿河》来源于克鲁乌科夫的作品，那也进行了脱胎换骨的改造，而不是传言中所说的微小改动。因此，克其萨教授认为，《静静的顿河》与其说是克鲁乌科夫的作品，倒不如说是肖洛霍夫的作品更接近于事实。

《红楼梦》的后 40 回

《红楼梦》是清代文学家曹雪芹的传世佳作，它倾注了作者的毕生心血，可惜作者因丧子之痛而英年早逝，该书最终未能完稿。虽然《红楼梦》存目为 120 卷，但在其早期流传的抄本《脂砚斋重评石头记》中，全书只有 80 回。

乾隆五十六年（1791 年），程伟元、高鹗以活字版首次刊行 120 回的《红楼梦》，题为《新镌全部绣像红楼梦》。程伟元在序中称，他多年来“竭力搜罗，自藏书家甚至故纸堆中无不留心”，陆续购得后 40 回残抄本，然后与友人“细加厘剔，截长补短，抄成全部”。

当然，程氏的说法没有多少人相信，一般认为《红楼梦》的后 40 回为高鹗所续。

1980 年在美国举行的首届国际《红楼梦》讨论会上，威斯康星大学的华人学者陈炳藻提出了一个石破天惊的看法，即《红楼梦》全书出自同一人之手。他采用的方法，就是把曹雪芹的惯用句式、常用词语以及搭配方式等作为检验依据，对前 80 回和后 40 回进行分析比对，然后讨论它们之间的正相关性。

他把全书分为三组，*A* 组为第 1～40 回，*B* 组为第 41～80 回，*C* 组为第 81～120 回。为了作比较，他又把与《红楼梦》风格迥异的《儿女英雄传》作为参照物，列为 *D* 组。

他从各组中选取了 8 万字，划分为名词、动词、形容词、副词和虚词五大类进行词汇统计，结果表明 *A* 组与 *B* 组的正相关高达 92%，后 40 回与前 80 回的正相关也达 80%，而《儿女英雄传》与前 80 回的正相关只有 32%，因此陈氏认为《红楼梦》全书均出自曹雪芹。

这一结果发表后，在国内红学界赞同者寥寥，有人甚至以此作为电脑不能代替人脑的证据。

实际上，只要稍微懂一点统计学原理，你就会发现，陈氏的结论是有点武断的，因为他的研究结果只能说明两点，即《儿女英雄传》不是曹雪芹所作，《红楼梦》后 40 回的语言风格很像前 80 回，而不是其他。

作为《红楼梦》的续作者，肯定是要刻意模仿原作的写作风格的，而这对自号“红楼外史”、对《红楼梦》前 80 回烂熟于心的高鹗来说，并不是一件困难的事。后 40 回与前 80 回的正相关度（80%）不及前 40 回与中 40 回的正相关度（92%），恰恰说明了模仿者尚未达到神似的地步，同样可以作为后 40 回是续作而不是原作的证据。

成群现象

报载,市民黄先生到夫子庙办事,将自行车停在一条小巷子里。当他办完事后,发现自行车被人偷走了,黄先生无奈只好乘公交车回家。

回家刚坐下没一会,便接到朋友打来的电话,让他去拿菊花。黄先生骑着妻子的自行车去了朋友家,两人兴致勃勃地聊了一个多钟头,等他提着两盆菊花走出朋友家时,发现锁在外面的自行车又不见了。朋友见状,赶紧把自己的自行车借给他。

岂料黄先生在回家途中内急要上厕所,等他从厕所中出来一看,顿时傻了眼:这回连车带花全没了踪影。

这种“祸不单行”、“好事成双”的现象在生活中时有发生,例如早几年在南京就出现了同一家庭在同一摸奖活动中连中 3 辆夏利车的事情,2001 年江苏“体彩”也出现过相隔不久的两期大奖得主为同一人的事实。不少人对此给以宿命论的解释,其实这种随机事件以各种不同形式成群出现的现象,在统计学中是屡见不鲜的,这就是所谓的成群现象。

美国密执安大学的工程师穆尔曾经做过一个证明事件成群的惊人试验,由于在试验中大量使用了球形彩色水果糖,故被称为“糖果花纹”试验。穆尔将相同数量的红色与绿色糖球放人一个玻璃瓶中,然后不断摇晃这个瓶子,直到两种色糖完全混合均匀为止。

注意瓶子的侧面。你也许会认为两种色糖已被均匀打散,红、绿相间,可是你看到的图案却是大片的红色图案中点缀着许多小块的绿色图案,或是大片的绿色图案中点缀着许多小块的红色

图案。

图案是如此地出人意料，甚至连数学家在乍见之下也会认为，这里一定有某种静电效应。实际上，真正起作用的是偶然性，花纹只是随机成群现象的正常结果。

对于像 π 这样的数字排列毫无规律可言的无理数，却从第 710161 位开始连续出现 7 个“3”，就是随机成群现象的一个例子。实际上，在 π 中什么蹊跷的事都有可能发生，例如你在其中可以找到你家的电话号码，只要你有这个耐心。

当然，在成群现象中往往有一些非偶然因素。如果你从一架直升飞机上看在一条高速公路上飞驰的车辆，你就会发现它们是成群结队的，但其中的成因有心理因素，因为司机往往不愿意老是按照同一速度开车，当他发现前面有很长距离没有汽车时，就会不自觉地加大油门开快起来。

神秘的纸牌把戏

这是一个与成群现象有关的魔术原理，是数学家兼业余魔术家诺尔曼·吉尔布雷德于 1958 年发现的，它说明了一种潜在的数学结构是如何进入一个随机集群中去，并由此产生令人感到不可思议的结果的。

先拿一副牌，事先将它按红黑相间的顺序排好。然后，把这副牌分成两叠，只要让两叠牌最下面一张牌的颜色互不相同就行了。现在将两叠牌洗到一起（只洗一次），再从洗过的牌上一对一对地拿牌。此时，不管你原先是如何洗牌的，你拿出的每一对牌都是一红一黑！

这一结果看起来有点神秘，但其作用机制却是非常简单的。

刚开始的时候，两叠牌的底牌为一红一黑。在洗这两叠牌时，当第 1 张牌脱离拇指落在桌面上时，手中两叠牌的底牌就变成清一色的了，这时无论这两张底牌中的哪一张落下来，它都与已在桌面上的那一张颜色不同，而此时手中剩下的两张底牌的颜色又变成一红一黑了。重复上面的推理过程，就知道后面落下的每一对牌都是一红一黑，尽管它会出现红、黑、黑、红这样的排列顺序，但就一对一对的拿牌而言，每一对牌的颜色都是互不相同的，导致了一红一黑成群出现的结果。

如果你注意到这两叠牌排列的顺序是颠倒的，即一叠是红、黑、红、黑，另一叠是黑、红、黑、红时，你就可以从吉尔布雷德原理中演化出数百种扑克把戏，下面就是两个较为典型的例子。

你把一副牌的 4 种花色按照黑桃、红心、梅花、方块的顺序一一排好，然后从上面开始 1 张 1 张地拿牌，这样正好使黑桃、红心、

梅花、方块的次序颠倒过来,拿到大约一半牌的时候为止(为了洗牌的方便,具体多少张无所谓),叠成一叠。

现在将分好的两叠随意地洗到一起,再从洗好的牌上 4 张 4 张地拿起,则这 4 张牌的花色一定各不相同,只是顺序有所打乱罢了。

如果你觉得这样还不足以在朋友面前显示出你的神勇,你干脆拿出两副牌来(可以含大、小王),一副的顺序越乱越好,另一副则按照前一副的相反顺序事先排列好,这样别人就看不出其中有什么破绽。

然后,你请你的朋友将这两副牌随机地洗到一起,洗好后再将这 108 张牌严格地分成两份(每份 54 张),这时你的朋友就会惊奇地发现,每一份都是一副完整的牌!

阿罗选举悖论

又是一个大选之年，在野党领导人 A、独立候选人 B 与现任总统 C 一起角逐总统职位。

最新的民意测验显示，有$\frac{2}{3}$的选民喜欢 A 胜过喜欢 B，有$\frac{2}{3}$的选民喜欢 B 胜过喜欢 C，于是在野党方面理所当然地认为，大多数选民将选择 A 而唾弃 C，挫败 C 蝉联总统的企图应该是易如反掌的。

那么，事实又如何呢？如果在民意测验中人们根据自己的好恶将 3 位候选人作如下排序（假定排序结果只有这 3 种，每种各有$\frac{1}{3}$的人选择），你就会发现一个惊人的结果。

(1) A，B，C；

(2) B，C，A；

(3) C，A，B。

第一和第三种选择都是选民喜欢 A 超过喜欢 B，这种情形占总人数的$\frac{2}{3}$；第一和第二种选择都是选民喜欢 B 超过喜欢 C，这种情形也占总人数的$\frac{2}{3}$。此时，我们是否可以下结论说，大多数选民喜欢 A 胜过喜欢 C 呢？

不！因为第二和第三种选择都显示了选民喜欢 C 超过喜欢 A，这种情形同样占总人数的$\frac{2}{3}$！

这条悖论之所以使人感到迷惑，是因为人们总认为好恶关系是可以传递的。就一个人而言，他的好恶通常是具有传递性的，如

果他认为 A 比 B 好，B 比 C 好，那么他肯定认为 A 比 C 好。

可是对于统计学的结论，由于认为 A 优于 B 与认为 B 优于 C 的人员构成通常是不一样的，其传递性被打破，所以才出现了这种奇怪的景象。

美国经济学家阿罗(Kenneth Joseph Arrow，1921—　　)曾从这条悖论出发得出一条结论：一个十全十美的民主选举系统在原则上是不可能实现的。阿罗因其一般均衡理论的研究而与英国学者希克斯分享了1972年的诺贝尔经济学奖。

把选举悖论用在其他方面也是很有趣的。一位姑娘同时有3位追求者，分别为 A，B，C。他们各有所长，姑娘一时感到难以取舍。

于是，有人建议她将3位求婚者分别按学历、长相和收入进行排序，排序结果同上。通过两两比较，这位可怜的姑娘发现，她掉进了一个怪圈，因为分析结果表明，A 比 B 好，B 比 C 好，C 又比 A 好！

随机游动

现在有一个醉汉在沿着一条直线行走，他是如此地不省人事，以至于他得靠掷硬币来决定下一步怎么走：掷出正面就向前走一步，掷出反面就向后退一步。这种醉汉式的运动，就是所谓随机游动。

由于醉汉向前、向后的概率是对等的，所以他最终返回起点的概率是1，只是所花的时间可能会长得惊人，因为他在理论上的平均返回时间是无穷大。

在一维随机游动中，有很多性质是和人们的直觉相悖的。如果我们选择一个相当长的时间段，例如掷了10万次硬币的时候，你觉得下面3种情形哪1种发生的可能性最大？

(1)正面向上的次数始终领先(例如进、进、退、进、退、进等)；

(2)反面向上的次数始终领先(例如退、退、退、进、进、退等)；

(3)一半的时间正面领先，一半的时间反面领先。

你可能会认为反正他要返回起点的，进、退应该参半，故第(3)种情形出现的可能性最大。如果你这样想，就大错特错了，因为在所有可能的情形中，(3)出现的概率最小，而(1)或(2)这两种极端情形出现的概率则最大！

对于二维随机游动，醉汉就处在一个画着无数网格的平面格点上，身上揣着一副牌，摸到“红心”就往东走，摸到“黑桃”就往南走，摸到“方块”就往西走，摸到“梅花”就往北走。和一维随机游动一样，他最终返回出发点的概率也是1。

但是，如果你在太空中迷了路，恐怕就没有这么幸运了。三维随机游动是在空间的立方体点阵上进行的，有6个行走方向，醉汉

拿着 1 颗骰子，掷出“1”来往东走，掷出“2”来往南走，掷出“3”来往西走，掷出“4”来往北走，掷出“5”来往上走，掷出“6”来则往下走。

与一维和二维随机游动不同的是，三维随机游动从原点出发后，最终能够返回原点的概率只有 0.35，这一结果出自于美国数学家、核弹专家乌拉姆(Stanislaw Marcin Ulam，1909—1984)之手。一旦你在太空行走中迷了路，那么你凭运气返回起点的可能性就只有 $\frac{1}{3}$ 了。

最优停时

对于成本极高的破坏性试验，例如原子弹的试爆，我们不可能无休止的进行下去，在得到必要的分析数据后就应该停止。

由于所需的试验次数（样本量）事先是不知道的，所以我们只有逐次取样直到样本能够提供足够的信息为止。如何选择最佳的时机结束试验，便是所谓最优停时问题。

需要指出的是，停时是一种随机停止，试验能否在时刻 n 停下来只依赖于前 n 次试验中我们所掌握的信息。对于随机抽样过程而言，可能的停时是多种多样的，从试验中得到的回报也不一样，而最优停时就是使得平均报酬达到最大的停止时刻。下面我们就来看一个小偷模型的最优停时问题。

现在有一个小偷，每天都出去偷一户人家，则他每天所偷得的财物价值就组成了一列正值随机变量 $y_1, y_2, \cdots$，且它们之间是相互独立、服从同一分布的。

可是，有贼就有警察，他每天都有被抓住的可能性，我们将这一概率记为 p，这里 $0<p<1$。由于一旦被抓住，不但要吐出全部赃物，还要面临牢狱之灾，因此对小偷而言，最明智的选择就是找一个适当的时候洗手不干。

若记

$$\delta_i = \begin{cases} 0, \text{当第 } i \text{ 次行窃时被抓住}, \\ 1, \text{当第 } i \text{ 次行窃时未被抓住}, \end{cases}$$

则第 n 天后小偷手中所积累的赃物总值为

$$X_n = \prod_{i=1}^{n} \delta_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

求和号前的系数确保了一旦被擒后财物归零。下面的问题就转化为求报酬序列 $X_n, n\geq 1$ 的最优停时。

就小偷问题而言,其最优停时不止一个,其中概率上比较常用的一个为

$$\tau = \inf\left\{n: \delta_n = 0 \text{ 或} \sum_{i=1}^{n} y_i \geq \frac{1-p}{p} Ey_1\right\},$$

其中 Ey_1 为小偷每天的平均所得。

上式的含义是:当小偷积累的财物达到这一数值的$\frac{1-p}{p}$倍(p为小偷每日被抓住的概率),或还没有达到这一数值即已束手就擒时,就可以洗手不干了。

秘书问题

秘书问题是英国数学家凯利(Arthur Cayley,1821—1895)于1875年提出的一个著名的概率问题,其在一般情形下的解答直到1960年才被伽德纳用最优停时理论加以解决。这个问题的具体提法是这样的:

一家公司要招聘1位秘书,结果有10个人来应聘。这10个人的素质优劣不等,并按随机的顺序一一去和公司经理见面。由于经理是位行事果断、说一不二的人,他每见1人后便会立即表态,是录用还是不录用你。如果录用了,则招聘活动立即终止,不再见其余的人;如果不录用,则继续见下一个人,且已拒绝过的人不再召回。

现在的问题是,这位经理应该如何取舍,才能使被录用的人是10位候选人中最好的1位的概率达到最大?

这个问题还有许多其他提法。例如,父母要送给孩子1件礼物,要孩子从10件礼物中进行挑选,这10件礼物精美的程度各不相同,且以随机的顺序一一展现在孩子面前。孩子一旦看中了某件礼品就不许再要其余的。如果前9件都未看中,那他只有拿第10件礼物了,因为规则规定不准回头拿前面已看过的。现在孩子应该怎样取舍,才能保证选到最好的礼物的概率最大?

伽德纳对这一问题的解答是这样的:要从这10件礼物中挑出最好的,我们应该仔细观察头3件礼物,然后把它们放弃掉,因为这3件礼物所起的只是一个参考作用,使你对礼物的总体有一个大致的了解。

接着,从第4件礼物开始,只要它比前3件礼物好,就立即接

受下来，结束选择；如果它没有以前的好，则继续看第5件礼物，如果它比前4件都好，则接受下来，依次类推，直到找到1件比以前看过的都好的礼物为止（如果最好的礼物不幸落在前3件之中，那你就只有接受最后1件礼物了）。

此时，你所选中的礼物是10件中最好的概率约为0.4，远高于从10件中随意抽1件就拿到了最好的概率0.1。

实际上，秘书问题的原始表述是有点牵强的，谁也不会这样去挑选秘书，除非应聘的人成百上千，实在无法一一面试。在现实生活中，能够满足这些苛刻的选择条件的大概只有未婚男女的相亲过程了。它需要在见面后给对方一个明确的答复，同意和某人相处以后就不能再与其他人相亲，而且"好马不吃回头草"——如果错过了前面的机会，只好同最后一个中意于他（她）的人相处，惟一不同的是他（她）能遇见的愿与他（她）相处的人数无法预先知道。

秘书问题的一般解

在一般情形下，我们可以把秘书问题概括为下列模型：

设有 N 个东西($N\geqslant3$)，代号分别为 $1,2,\cdots,N$，号码越小则品质越好，其中"1"为最好。现将这 N 个东西按随机顺序排列，任何2个东西可互相比较品质的优劣，但不知道它们的实际号码。我们依次进行观察，并根据观察结果决定是拒绝还是接受，如果接受就停止观察，任务结束。

为了使得到"1"的概率达到最大，我们首先要进行 m 次不作任何选取的观察以积累资料，这里

$$m=\min\left\{n:n\geqslant1,\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant1\right\}-1。$$

然后从第 $m+1$ 次观察开始，只要观察到的东西比前面的都好，就接受它并终止观察；若观察到第 $N-1$ 件时都未能找到比以前各件都好的，就接受第 N 件。

在这样的停止规则下，我们挑到最好的1件的概率为

$$p=\frac{m}{N}\left(\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)。$$

在实际操作中，关键是根据 N 值计算出相应的 m 值。下表给出了 $3\leqslant N\leqslant20$ 时所对应的 m 值与 p 值。

N	m	p	N	m	p
3	1	0.500	6	2	0.428
4	1	0.458	7	2	0.414
5	2	0.433	8	3	0.410

续表

N	m	p	N	m	p
9	3	0.406	15	5	0.389
10	3	0.399	16	6	0.388
11	4	0.398	17	6	0.387
12	4	0.396	18	6	0.385
13	5	0.392	19	7	0.385
14	5	0.392	20	7	0.384

当你有3项选择(即 $N=3$)时,查得 $m=1$,即将第1件东西放过以后从第2件开始依停时原则进行取舍,此时挑到最好的概率为0.5。

公平博弈中的对策

所谓公平博弈，就是参加博弈的双方输赢的机会完全平等，这里一切技巧、经验都是毫无用处的，例如纯凭掷硬币、掷骰子等随机因素来定胜负的赌局，而像下围棋、下象棋这类涉及技巧和经验的比赛则不在其列。

若记 X_0 为一场公平博弈中某个局中人进场时所带来的本金，X_n 是他在第 n 次博弈结束时手中所持有的本金(已经过了 n 次变化)，那么无论下一次他如何利用前面所积累起来的经验，他所能期望于第 $n+1$ 次博弈后的本金依然是 X_n。1939 年，法国数学家莱维(Paul Levy，1886—1971)将此类随机过程称为“鞅”，并首开鞅论研究的先河。

尽管在公平博弈中的平均所得是零(即不输不赢)，但仍有不少人认为可以通过寻找最优停时的方法来增加本金，最终赢得比赛。实际上，鞅的停时定理已经明确告诉我们，只要你的本金是有限的，则在任何停时方案下结束比赛时，你的本金的期望值还是 X_0(即你入场时所带来的本金数)。

1989 年，我们在给研究生讲到《鞅论》这一章时，就有同学对这一结论提出了异议。他在课后设计了一个停时方案，使得在比赛结束时自己不多不少赢得 1 元钱。他所设计的“赌场必杀计”是这样的：

第 1 局：下赌注 1 元，如果胜了，赢 1 元，结束比赛；如果负了，输 1 元，继续进行下一局比赛。

第 2 局：下赌注 2 元，如果胜了，赢 2 元，扣除上一局输掉的 1 元，实赢 1 元，结束比赛；如果负了，输 2 元，连同上一局共输掉 3

元,继续比赛。

第3局:下赌注4元,如果胜了,赢4元,扣除上两局输掉的3元,实赢1元,结束比赛;如果负了,输4元,连同上两局共输掉7元,继续比赛。

第4局:下赌注8元,如果胜了,赢8元,扣除上两局输掉的7元,实赢1元,结束比赛;如果负了,输8元,连同上两局共输掉15元,继续比赛。

如此往复,赌注不断翻番,直到胜了为止,反正不会一直输下去,最后都是赢了1元走路,岂不快哉!

很多同学在讨论其错误时都把眼光集中在他有可能一直输下去,而没有想到现实根本不允许他这样做,因为当他连输27局时,他的欠债已经达到了1.3亿,比赛不想停也得停,因为已没有钱可以让他翻本了!

有趣的是,“鞅(martingale)”的本来含义就是表示一种赌输一局后加倍下注的策略,没有想到这种方式被后人重新提及。

概率统计大事年表

1654 年　法国数学家帕斯卡(1623—1662)与费尔马(1601—1665)通信讨论了"赌徒分赌金问题",建立了概率论的萌芽

1657 年　荷兰数学家、物理学家惠更斯(1629—1695)著《论机会游戏中的计算》,首次引入了数学期望的概念

1662 年　英国学者格朗特(1622—1674)发表《关于死亡公报的自然和政治观察》,建立了统计学的雏形

1663 年　意大利数学家、赌博家卡丹诺(1501—1576)的遗著《机遇博弈》出版,全书成书于 1564 年

1713 年　瑞士数学家伯努利(1654—1705)的遗著《猜度术》出版,给出了概率论中的第一个极限定理伯努利大数定律

1718 年　法国数学家棣莫弗(1667—1754)发表《机遇论》,首次定义独立事件的乘法定理,提出了棣莫弗极限定理

1733 年　棣莫弗利用 $n!$ 的近似公式导出了正态分布的频率曲线,以此作为二项分布的近似

1763 年　英国律师贝叶斯(1702—1761)发表《论有关机遇问题的求解》,提出了贝叶斯公式和贝叶斯方法

1777 年　法国博物学家蒲丰(1707—1788)提出了著名的投针问题,成为几何概型的第一个经典例子

1809 年　德国数学家、物理学家高斯(1777—1855)在研究测量误差理论时重新导出正态分布,后被称为高斯分布

1812 年　法国数学家、天文学家拉普拉斯(1749—1827)发表《概率的分析理论》,提出了概率的古典定义,将分析工具引

入概率论

1827 年　英国植物学家布朗(1773—1858)首次观察到悬浮在液体中的微粒子作不规则的运动,在概率论上被称为布朗运动

1852 年　比利时统计学家、数理统计的创始人奎特莱特(1796—1874)在布鲁塞尔发起召开了第一次国际统计学大会

1866 年　俄国数学家、机械学家切比雪夫(1821—1894)利用切比雪夫不等式建立了关于独立随机变量序列的大数定律

1889 年　英国统计学家、遗传学家高尔顿(1822—1911)在《自然遗传》一书中首次提出"相关"和"回归"的概念

1898 年　英国数学家、现代统计学的创始人之一皮尔逊(1857—1936)创立了描述统计学

1900 年　德国数学家希尔伯特(1862—1943)在国际数学家大会上提出了建立概率论公理化体系的问题

皮尔逊提出了拟合优度检验,奠定了大样本理论的基础,标志着现代统计学的兴起

1901 年　俄国数学家、力学家李亚普诺夫(1857—1918)创立了特征函数法,实现了中心极限定理在研究方法上的突破

1907 年　苏联数学家马尔可夫(1856—1922)提出了马尔可夫链,开创了随机过程论研究的先河

1908 年　英国医生、推断统计学的先驱戈赛特(1876—1937)发现了 t 分布,开创了小样本理论的研究

1909 年　法国数学家波莱尔(1871—1956)引进可数事件集的概率,改进了大数定律,并得出波莱尔强大数定律

1912 年　英国统计学家、遗传学家费歇尔(1890—1962)建立了以极大似然估计为中心的点估计理论

1917 年　苏联数学家伯恩斯坦(1880—1968)构造了概率论的第一个公理化结构,建立了关于独立随机变量之和的中心

极限定理

1919年　奥地利数学家、空气动力学家米泽斯(1883—1953)给出概率的频率定义及其应满足的随机性公理

1923年　美国数学家维纳(1894—1964)给出了布朗运动的严格数学定义,并证明了布朗运动轨道的连续性

费歇尔与梅克齐合作发表了第一个实验设计实例,并首创了与实验设计相适应的方差分析方法

1925年　费歇尔与英国统计学家叶茨(1902—1994)合作提出了区组设计和拉丁方,创立了实验设计这一统计学分支

1928年　美国统计学家奈曼(1894—1981)与小皮尔逊(1895—1980)提出了"备择假设"的概念,并发展了假设检验的理论

英国统计学家维夏特(1898—1956)导出维夏特分布,标志着多元分析成为一门独立学科

1929年　苏联数学家、现代概率论的奠基人之一辛钦(1894—1959)提出了关于独立同分布的随机变量序列的辛钦大数定律

1931年　美国数学家伯克霍夫(1884—1944)证明了逐点遍历定理,导致了遍历理论的产生

苏联数学家柯尔莫哥洛夫(1903—1987)发表《概率论的解析方法》,奠定了马尔可夫过程的理论基础

1933年　柯尔莫哥洛夫发表《概率论基础》,建立了基于测度论的概率论公理化系统,奠定了现代概率论的基础

1934年　奈曼定义了置信区间估计概念,建立了基于概率的频率解释的区间估计理论

1939年　法国数学家、现代概率论的奠基人之一莱维(1886—1971)首次提出"鞅"的概念,开创了鞅论研究的先河

美国统计学家瓦尔德(1902—1950)改进了抽样检验理

论,建立了统计判决函数理论

1942 年 维纳对平稳过程利用谱分解导出了维纳滤波公式,并在防空火力控制及电子工程等部门得到了应用

1943 年 瓦尔德创立了序贯分析,至 1947 年《序贯分析》一书的发表,标志着这一新分支的诞生

1944 年 日本数学家角谷静夫(1911—)把二维马尔可夫过程与位势理论结合起来,形成战后概率论研究的一个重要方向

1945 年 美国数学家杜布(1910—)在关于马尔可夫链的文章中首次提出有关"停时"的思想

1946 年 瑞典统计学家克拉默(1893—1985)发表《统计学的数学方法》,标志着数理统计学最终形成了自己的科学体系

1950 年 瓦尔德发表《统计决策函数》,创立了统计决策理论,把统计学发展成为一门决策科学

1951 年 日本数学家伊藤清(1915—)建立了关于布朗运动的随机微分方程理论,为研究马尔可夫过程开辟了新的道路

美国数学家罗宾斯(1915—)提出了在有随机误差干扰下的随机逼近方法,成为统计学上的一个重大突破

1953 年 杜布的经典名著《随机过程论》发表,并就时间离散的情形证明了上鞅分解定理

1958 年 中国数学家王梓坤(1929—)建立了"极限过渡法",构造了全部生灭过程

1977 年 美国统计学家图基(1915—2000)发表《探索性数据分析》,把统计学看作数据分析的一部分

参考文献

[1] 科学美国人编辑部著.从惊讶到思考——数学悖论奇景. 北京:科学技术文献出版社,1982

[2] G·波利亚著,李心灿等译.数学与猜想(第二卷). 北京:科学出版社,1984

[3] 中国大百科全书数学编辑委员会编.中国大百科全书·数学卷.北京:中国大百科全书出版社,1988

[4] C·R·劳著,石坚等译. 统计与真理——怎样运用偶然性. 台北:九章出版社,1998

[5] 郭凯声编著.数学游戏. 北京:科学技术文献出版社,1999

[6] 陈希孺著.机会的数学. 北京:清华大学出版社,2000

跋

这是一部源于生活、充满趣味的科普读物,适合于理工科大学生阅读,对学习《概率论与数理统计》课程会有很好的帮助。本书的两位作者,长期从事一线数学教学工作,他们在概率统计专业方向上都取得过若干研究成果,尤其是他们对《概率论与数理统计》课程的教学改革倾注了大量的精力,这本书便是他们学习素质教育思想,研究数学教学新理念、新方法的产物,体现了他们扎实的数学功底。

20 世纪 90 年代中期在全国广泛开展的素质教育,对提高学生的整体素质,改善学生的知识结构,开拓学生的人文视野,培养学生的创新精神,起到了重要的作用。随着教育改革实践的不断深入,如何将素质教育融入教学的每一环节之中,不断提高学生知识的应用能力和创造能力,是贯彻素质教育思想必须解决的核心课题。该书所倡导的由应试向应用转移、课内向课外延伸、知识向学识演化的教学机制,就是一种有益的探索。

该书虽然是一本通俗读物,但揭示了概率论与数理统计中许多重要概念、思想与方法建立的过程,在愉快阅读的过程中,给读者以知识和智慧的启迪,激发每一个读者去奇妙的概率世界探个究竟,去看一看人类是如何不断地在“混沌”中发现“有序”,并逐步掌握一把从“会学”到“学会”的钥匙。

我希望在今后的岁月里,两位作者能在数学教学的改革中多有建树,在素质教育的实践中永不停步。

薛 通

2001 年 12 月

[G e n e r a l   I n f o r m a t i o n]
书名= 老百姓的数学：奇妙的概率世界
作者=
页数= 1 4 4
S S 号= 1 0 9 0 7 2 7 1
出版日期=

封面
书名
版权
前言
目录
正文